0 Vorwort

Diese Broschüre wendet sich an Schüler etwa der Jahrgangsstufe 10, die im Unterricht und zu Hause mit einem graphischen Taschenrechner arbeiten. Sie will ihnen helfen, den Rechner als nützliches Werkzeug zu verwenden und so zu einem besseren Verständnis der Mathematik zu kommen. Gleichermaßen ist es für Lehrer gedacht, die sich in den themenbezogenen Einsatz des GTR einarbeiten wollen.

Die vier Themen Potenzen und Potenzfunktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, Trigonometrie sowie Abbildungen im Koordinatensystem orientieren sich am Lehrplan der Jahrgangsstufe 10 der bayerischen Realschule, allerdings ohne vollständig zu sein. Die Anwendungen sind aber leicht auf entsprechende andere Schularten, auch in anderen Bundesländern, zu übertragen.

Der Schwerpunkt liegt bei den Themen, wo sich der TI-83 effektiv zur graphischen Darstellung und zum dynamischen Experimentieren einsetzen lässt. Solche Anwendungen finden sich speziell bei den Funktionsgraphen, wo z. B. die Abhängigkeit von Formvariablen schnell deutlich wird. Auch das Entlangfahren auf der Kurve, „trace” genannt, und das dynamische Entstehen eines Graphen veranschaulichen die Zusammenhänge einer Funktion.

In einem zweiten Bereich kann die Rechenleistung des TI-83 wirksam genutzt werden. Listen können die Koordinaten von Punktmengen speichern, Matrizen können die Punktmengen transformieren. Da solche Listen graphisch dargestellt werden können, sind Abbildungen, z. B. von Dreiecken, sowohl zu berechnen als auch zu zeichnen.

Immer ist aber zu bedenken, dass der TI-83 nur ein numerisches Werkzeug ist, das mit konkreten Zahlen rechnet.

An verschiedenen Stellen ergibt sich eine Berührung mit der Informatik. Beispielsweise beim Thema Dreiecksberechnung werden Algorithmen in der Programmiersprache des TI-83 formuliert. Zur Unterscheidung verschiedener Datentypen wie einfache Variable, Liste, Funktionsterm, Matrix oder bei Fragen zur Genauigkeit sind Vorkenntnisse aus der Informatik günstig.

Die mathematischen Inhalte sind meist sehr knapp dargestellt. Auf eine Einführung und exakte Herleitung der Sätze wird verzichtet. Die meisten Beispiele enthalten eine ausführliche Tastenfolge und die Wiedergabe der Bildschirmanzeige. Die Broschüre kann also weder ein Lehrbuch noch das Bedienerhandbuch ersetzen, nur ergänzen. Es soll helfen, den herkömmlichen Unterricht durch die Möglichkeiten des TI-83 zu unterstützen, weiterzuentwickeln und zu verbessern. Die Beispiele sollen zu eigenem, vielleicht vergnüglichem Experimentieren anregen.

1 Potenzen, Potenzfunktionen

1.1 Schreiben von Potenzen und Berechnen des Potenzwertes am GTR

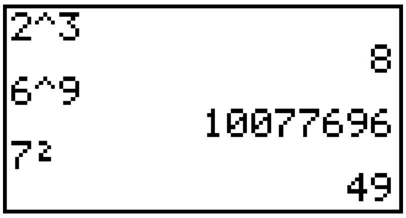
1.1.1 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

Arbeitsschritte Display

Potenzen der Form a^b mit $a \in \mathbb{N}$ und $b \in \mathbb{N}$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$
$$6^9 = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6}_{9\text{ mal}} = 10077696$$
$$7^2 = 49$$

`2^3` ENTER
`6^9` ENTER
das „Hoch-”Zeichen ^ und der Exponent 2 kann auch mit der Taste x^2 erreicht werden:
`7` x^2 ENTER


```
2^3
                 8
6^9
          10077696
7²
                49
```

Potenzen der Form a^b mit $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{N}$

Unendliche periodische Dezimalbrüche und irrationale Zahlen können mit dem TI-83 nicht bearbeitet werden. Statt $\mathbb{Q}$ oder gar $\mathbb{R}$ wird daher im folgenden nur eine Teilmenge endlicher Dezimalbrüche betrachtet, deren Stellenzahl vom TI-83 noch dargestellt werden kann.

$2,5^3$
a^b mit a =17,55 und $b = 5$ ergibt
$17,55^5 = 1664890,2271096875$
Der TI-83 kann davon maximal 10 Stellen anzeigen

`2.5^3` ENTER
`17.55` STO▸ ALPHA `A`
ALPHA `:`
`5` STO▸ ALPHA `B`
ALPHA `:`
`A^B` ENTER

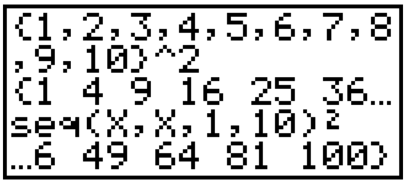

```
2.5^3
            15.625
17.55→A:5→B:A^B
       1664890.227
```

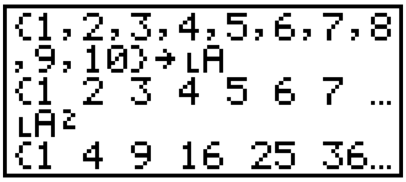
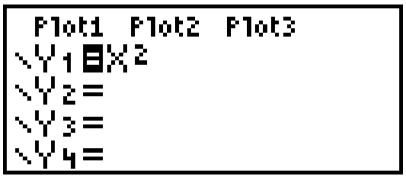
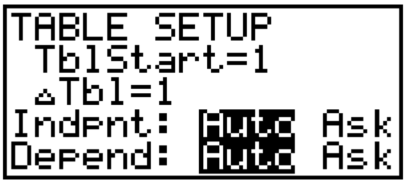
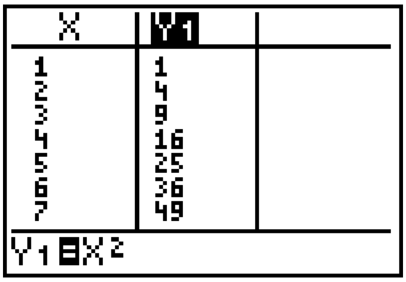
Mengen von Potenzen
Beispiel: Quadratzahlen
$a^b;\ a \in \mathbb{N},\ b = 2$

Mengen von Zahlen können am TI-83 in geschweiften Klammern, getrennt durch Kommata, eingegeben werden.
Achtung: entgegen der in der Mathematik üblichen Schreibweise lassen sich am TI-83 Zahlenmengen mit Rechenoperatoren verknüpfen, z. B. $\{1, 2, 3\} * 2$ ergibt $\{2\ 4\ 6\}$

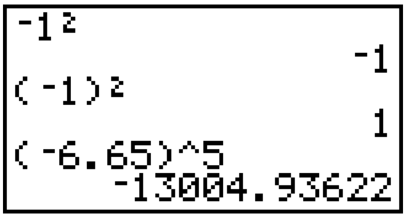
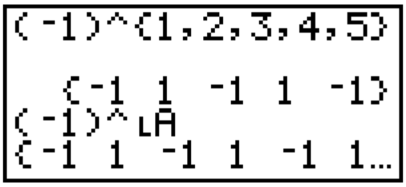
`{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}^2`

Diese Menge lässt sich auch als Folge bilden:
`seq(x,x,1,10)^2`
ENTER mit
2nd `LIST OPS`
`5:seq(`

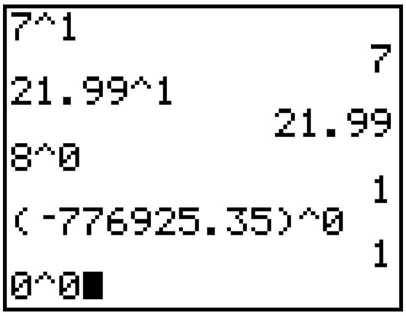

```
{1,2,3,4,5,6,7,8
,9,10}^2
{1 4 9 16 25 36…
seq(X,X,1,10)²
…6 49 64 81 100}
```

Für Zahlenmengen, z. B. {1,2,3,} („Liste”) muss eine spezielle Listenvariable gewählt werden, z. B. ʟ1 bis ʟ6 oder auch ʟK. Speichert man eine Liste trotzdem auf eine „normale” Variable, z. B. K, so enthält diese nur die erste Zahl der Liste.	... 2nd LIST OPS B:ʟ ENTER ALPHA A ...	 {1,2,3,4,5,6,7,8 ,9,10}→ʟA {1 2 3 4 5 6 7 ... ʟA² {1 4 9 16 25 36...
Eine Wertetabelle der Funktion $y = x^2$ mit $ID = \mathbb{N}$, $W \subset \mathbb{N}$ liefert ebenfalls die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, ...	Y= , Funktionsterm für y1= eingeben: X x^2	 Plot1 Plot2 Plot3 \Y1■X² \Y2= \Y3= \Y4=
	2nd TBLSET TblStart=1 ΔTbl=1	 TABLE SETUP TblStart=1 ΔTbl=1 Indpnt: Auto Ask Depend: Auto Ask
	2nd TABLE in der Tabelle kann mit den Cursortasten ▼▲ „gescrollt” werden	 X Y1 1 1 2 4 3 9 4 16 5 25 6 36 7 49 Y1■X²

Potenzen der Form a^b mit $a \in \mathbb{R}^-$ und $b \in \mathbb{N}$

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
<u>Achtung</u>: soll eine negative Basis potenziert werden, so muss sie mit ihrem Vorzeichen eingeklammert und die Klammer potenziert werden. Die Taste für das negative Vorzeichen (-) darf nicht mit dem Rechenzeichen − zur Subtraktion verwechselt werden! $(-1)^2$ ergibt 1, aber -1^2 ergibt -1! $(-6,65)^5 = -13004,9362165625$	(-)1^2 ((-)1)^2 (im Folgenden wird meist nicht mehr besonders auf die Taste (-) für das negative Vorzeichen hingewiesen) (-6.65)^5	 -1² -1 (-1)² 1 (-6.65)^5 -13004.93622
Potenzen mit negativer Basis und geraden Exponenten ergeben ein positives Ergebnis, mit ungeraden Exponenten ein negatives Ergebnis:	unter ʟA ist immer noch die Menge {1;2;... 10} abgespeichert	 (-1)^{1,2,3,4,5} {-1 1 -1 1 -1} (-1)^ʟA {-1 1 -1 1 -1 1...

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Exponenten 1 und 0		

Eine beliebige Basis hoch 1 ergibt immer die Basis selbst:
$a^1 = a;\ a \in \mathbb{R}$
$7^1;\ 21{,}99^1$
eine beliebige Basis (außer Null) hoch 1 ergibt immer 1:
$a^0 = 1;\ a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$3^0;\ (-776925{,}35)^0$
	`7^1`
	`21.99^1`
	`8^0`
	`(-776925.35)^0`
	Achtung:
	`0^0` ergibt eine Fehlermeldung!
		
		

```
7^1
              7
21.99^1
          21.99
8^0
              1
(-776925.35)^0
              1
0^0▮
```

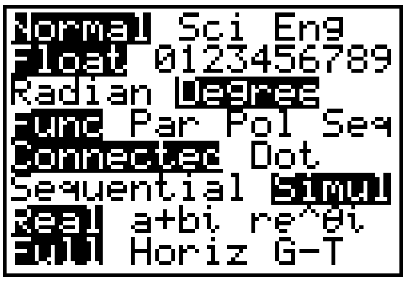
```
ERR:DOMAIN
1:Quit
2:Goto
```

1.1.2 Potenzschreibweise

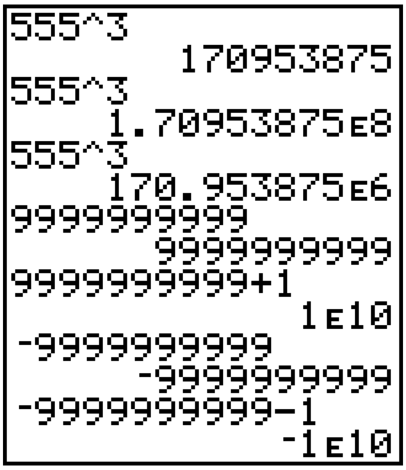
Da jeder Rechner nur endlich viele Stellen verarbeiten und am Display darstellen kann, wendet man bei Zahlen mit sehr großem und sehr kleinem Betrag die Potenzschreibweise an:

$100\,000 = 10^5$ `1E5`

$123\,4567 = 1{,}23456 \cdot 100\,000 = 1{,}23456 \cdot 10^5$ `1.23456E5`

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Drei verschiedene Schreibweisen für Zahlen sind möglich.	Die Darstellung der Zahlen am Display wird mit MODE voreingestellt. Nach ENTER zurück zum „Home"-Bildschirm mit 2nd QUIT	

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
Full Horiz G-T
```



```
555^3
      170953875
555^3
   1.70953875E8
555^3
   170.953875E6
9999999999
     9999999999
9999999999+1
           1E10
-9999999999
    -9999999999
-9999999999-1
          -1E10
```

`Normal:` alle Dezimalstellen (max. 10) werden notiert:

$555^3 = 170953875$ `170953875`

`Sci:` Potenzschreibweise (auch wissenschaftliche Schreibweise):

$555^3 = 1{,}70953875 \cdot 10^8$ `1.70953875E8`

(bei Zahlen mit mehr als 10 Stellen wird automatisch auf Potenzschreibweise umgeschaltet)

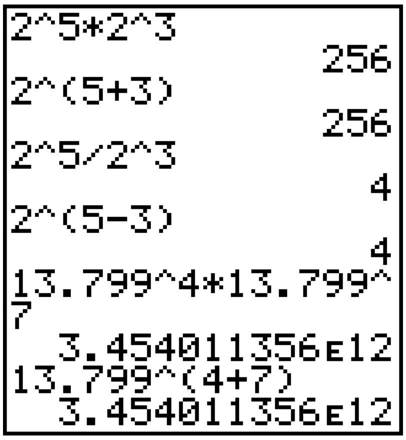
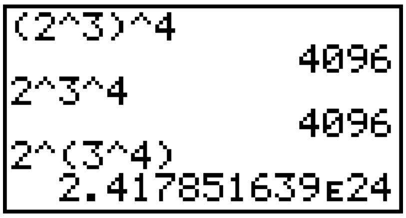
`Eng:` wie Potenzschreibweise, allerdings so dass Exponent ein Vielfaches von 3 ist:

$555^3 = 170{,}953875 \cdot 10^6$ `170.953875E6`

Im Folgenden ist immer die Einstellung `Normal:` gewählt.

1.1.3 weitere Potenzgesetze

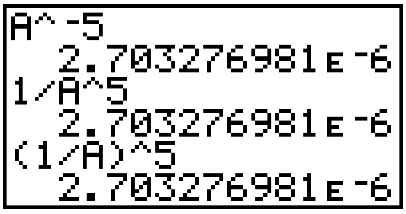
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$,
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$,
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$.

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiele: $2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3} = 2^8 = 256$ $\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$ $13,799^4 \cdot 13,799^7 = 13,799^{4+7} =$ $= 13,799^{11} =$ $= 3454011356116,3291152226701...$	`2^5*2^3` ENTER `2^(5+3)` ENTER `2^5÷2^3` ENTER `2^(5-3)` ENTER `13.799^4*13.799^7` ENTER `13.799^(4+7)` ENTER	 2^5*2^3 256 2^(5+3) 256 2^5/2^3 4 2^(5-3) 4 13.799^4*13.799^7 3.454011356E12 13.799^(4+7) 3.454011356E12
$(2^3)^4 = 8^4 = 4096$ $2^{(3^4)} = 2^{81} =$ $= 2417851639229258349412352 \approx$ $\approx 2,417851639 \cdot 10^{24}$	`(2^3)^4` ENTER `2^3^4` ENTER `2^(3^4)` ENTER	 (2^3)^4 4096 2^3^4 4096 2^(3^4) 2.417851639E24
Der Term mit dem höchsten Wert, der aus drei Ziffern zusammengesetzt werden kann, ist $9^{9^9} = 9^{387420489}$. Das wäre eine Dezimalzahl mit über 300 Millionen Stellen.	`9^(9^9)` diese Zahl kann am TI-83 nicht mehr dargestellt werden: Fehlermeldung!	 9^(9^9)█  ERR:OVERFLOW 1:Quit 2:Goto
Die betragsgrößte Zahl, die am TI-83 dargestellt werden kann, ist $9,999999999 \cdot 10^{99}$.	`9.999999999E99` `10E99` ergibt eine Fehlermeldung!	 9.99999999999E99 9.999999999E99 10E99█  ERR:OVERFLOW 1:Quit 2:Goto

1.1.4 Potenzen mit negativen, rationalen und reellen Exponenten

Potenzen der Form a^b mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in Z$

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display

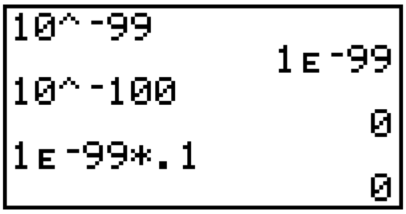
$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$;
$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in Z$
	ALPHA `A^`(-)`5`, wobei auf `A` eine beliebige Zahl gespeichert ist.
	`1/`ALPHA`A^5`
	`(1/`ALPHA`A)^5`
		
		A^-5
		2.703276981E-6
		1/A^5
		2.703276981E-6
		(1/A)^5
		2.703276981E-6

Die kleinste positive Zahl, die der TI-83 kennt, ist 10^{-99}. Das ist eine Dezimalzahl mit einer Null vor und 98 Nullen nach dem Komma, gefolgt von einer 1.
Kleinere positive Zahlen rundet der TI-83 ab auf 0.

`10^(-)99`

`10^(-)100`

`1E(-)99*.1`



```
10^-99
              1E-99
10^-100
                  0
1E-99*.1
                  0
```

Potenzen der Form a^b mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{Q}$

Aus $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a^1 = a$ ergibt sich $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$. Diese Definition wird erweitert zu

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Beispiele:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a$$

$$\left(a^{\frac{1}{6}}\right)^6 = a$$

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

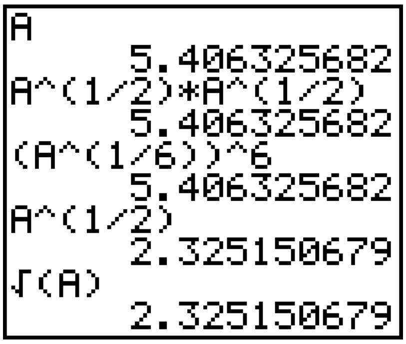
`ALPHA A`

`ALPHA A^(1/2)* ALPHA A^(1/2)`

`(ALPHA A^(1/6))^6`

`ALPHA A^(1/2)`

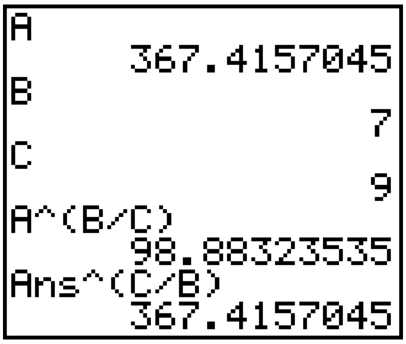
`2nd √(ALPHA A)`



```
A
        5.406325682
A^(1/2)*A^(1/2)
        5.406325682
(A^(1/6))^6
        5.406325682
A^(1/2)
        2.325150679
√(A)
        2.325150679
```

$$\left(a^{\frac{b}{c}}\right)^{\frac{c}{b}} = a^{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}} = a^1 = a$$

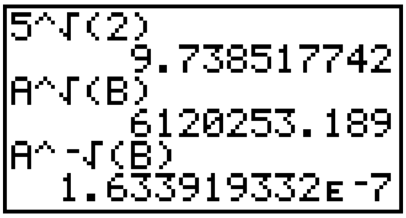
Für „beliebige” Werte für **A** $\in \mathbb{R}$, **B** und **C** $\in \mathbb{N}$
`A^(B/C)`
`^(C/B)`
Die Eingabe eines Rechenzeichens (z. B. „`^`”) ohne vorausgehenden Term erzeugt automatisch den Term „`Ans`” davor.



```
A
        367.4157045
B
                  7
C
                  9
A^(B/C)
        98.88323535
Ans^(C/B)
        367.4157045
```

Potenzen der Form a^b mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display

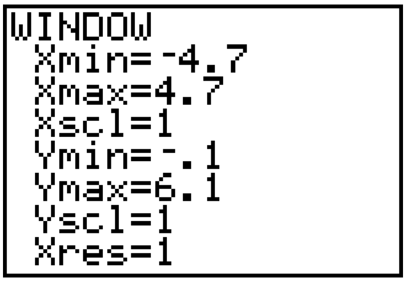
Die Rechenregeln für Potenzen können auch auf reelle Exponenten ausgeweitet werden. Allerdings behandelt der TI-83 irrationale Zahlen als endliche Dezimalbrüche!	`5^2nd √(2)`
	`ALPHA A ^2nd √(ALPHA B)`
	`A^(-)2nd √(ALPHA B)`
		

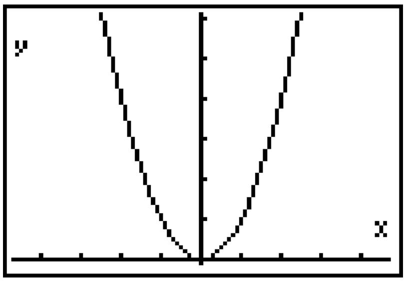
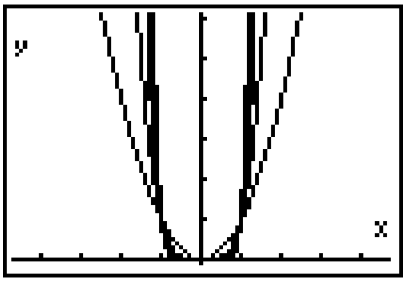
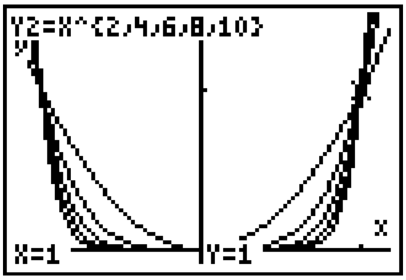
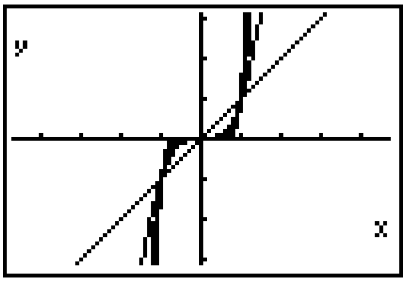
```
5^√(2)
        9.738517742
A^√(B)
        6120253.189
A^-√(B)
  1.633919332E-7
```

1.2 Potenzfunktionen

1.2.1 Potenzfunktionen $y = x^n$; $n \in \mathbb{N}$

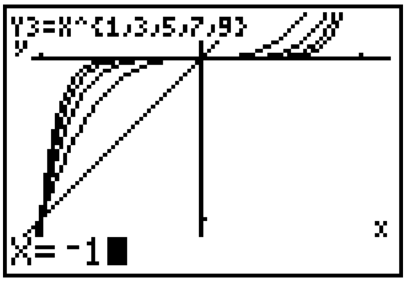
Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display

$p: y = x^2$; $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}_0^+$	$\boxed{\text{MODE}}$ `Func`
	$\boxed{\text{Y=}}$,
	Funktionsterm für `Y1=` eingeben:
	`X` $\boxed{x^2}$,
	$\boxed{\text{WINDOW}}$,
	dann Fensterdaten so festlegen, dass 1 Pixel Δx = 0,1 und Δy = 0,1 entspricht, z. B.
	`Xmin=-4.7`
	`Xmax=4.7`
	`Xscl=1`
	`Ymin=-.1`
	`Ymax=6.1`
	`Yscl=1`
	`Xres=1`
		
		Plot1 Plot2 Plot3
		\Y1=X²
		
		WINDOW
		Xmin=-4.7
		Xmax=4.7
		Xscl=1
		Ymin=-.1
		Ymax=6.1
		Yscl=1
		Xres=1

Der Graph der Funktion $p: y = x^2$ heißt Normalparabel.	$\boxed{\text{GRAPH}}$	
Potenzfunktionen mit geraden Exponenten: $p_n: y = x^n$; $n \in \{2, 4, 6, 8, ...\}$	`Y2=X^{2,4,6,8,10}`	
Die Graphen aller dieser Potenzfunktionen gehen durch den Punkt $P(1\|1)$, da $1^n = 1$ für alle $n \in \{2, 4, 6, 8, ...\}$, ebenso durch $Q(-1\|1)$. Sie sind achsensymmetrisch zur y-Achse.	$\boxed{\text{ZOOM}}$ `1:ZBox`, Ausschnitt von Hand wählen $\boxed{\text{TRACE}}$ `1` $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{\blacktriangledown}\boxed{\blacktriangledown}\boxed{\blacktriangledown}$ . . .	 Y2=X^{2,4,6,8,10} X=1 Y=1
Potenzfunktionen mit ungeraden Exponenten $p_m: y = x^m$; $m \in \{1, 3, 5, 7, ...\}$.	`Y3=X^{1,3,5,7,9}` (`Y1` und `Y2` deaktivieren)	

Die Graphen aller dieser Potenzfunktionen gehen durch den Punkt *P*(1|1) sowie durch *Q*(-1|-1), da $(-1)^n = -1$ für alle ungeraden *n*. Sie sind punktsymmetrisch zu *O*(0|0).

$\boxed{\text{TRACE}}$ `-1` $\boxed{\text{ENTER}}$
$\boxed{\blacktriangledown}\boxed{\blacktriangledown}\boxed{\blacktriangledown}$ . . .



```
Y3=X^{1,3,5,7,9}
X=-1
```

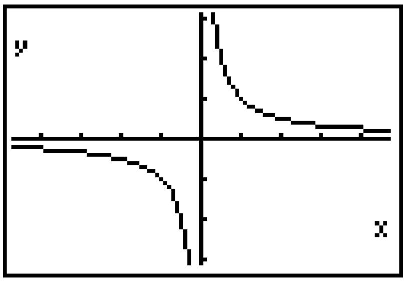
1.2.2 Potenzfunktionen mit negativen Exponenten

Arbeitsschritte Tastenfolge Display

$h_n : y = x^{-n};\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ n \in \mathbb{N}$

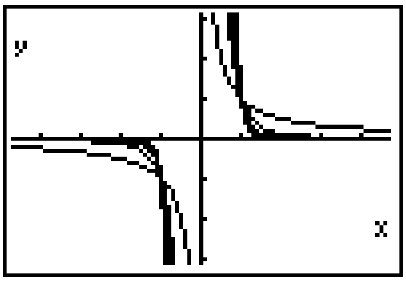
Da $x^{-1} = \frac{1}{x}$, ist der Graph der Funktion $h : y = x^{-1}$ die bekannte Hyperbel.

```
Y4=X^-1
```



Die Hyperbeln $h : y = x^p$ mit ungeradem (negativem) Exponenten $p \in \{-1, -3, -5, -7 ...\}$ sind punktsymmetrisch zum Ursprung und haben die Punkte *P*(1|1) und *Q*(-1|-1) gemeinsam.

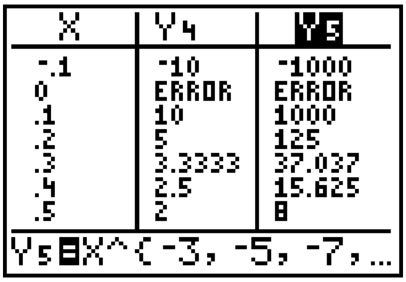
```
Y5=X^{-1,-3,-5,
-7,-9}
```



Für *x* = 0 ist keine dieser Funktionen definiert, da 0^{-n}; $n \in N_0$ nicht definiert ist. Die Wertetabelle zeigt dort „`ERROR`".

$\boxed{\text{2nd}}$ `TBLSET`
```
TblStart=-.1
ΔTbl=.1
```

$\boxed{\text{2nd}}$ `TABLE`

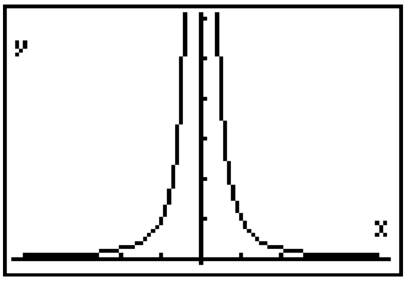


X	Y4	Y5
-.1	-10	-1000
0	ERROR	ERROR
.1	10	1000
.2	5	125
.3	3.3333	37.037
.4	2.5	15.625
.5	2	8

```
Y5=X^{-3, -5, -7,…
```

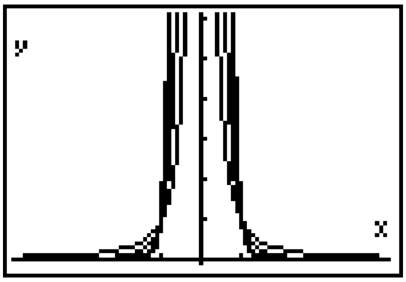
Die Hyperbel $h : y = x^{-2}$ ist wie alle weiteren mit geradem (negativem) Exponenten achsensymmetrisch zur *y*-Achse.

```
Y6=X^-2
```



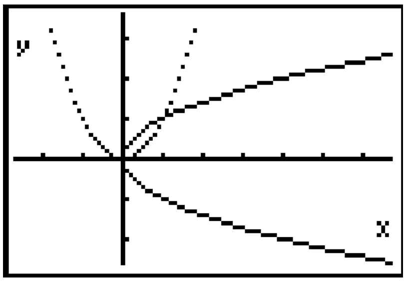
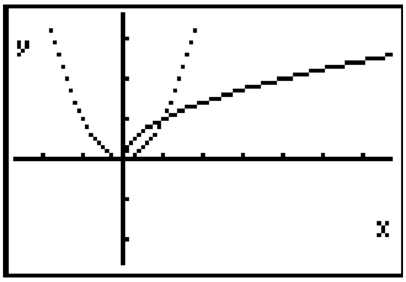
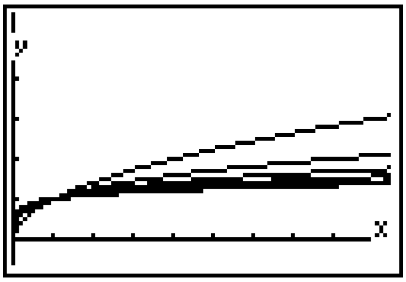
Alle diese Hyperbeln gehen durch die Punkte *P* (1|1) und *Q*(-1|1).

```
Y7=X^{-2,-4,-6,
-8,-10}
```



1.2.3 Potenzfunktionen der Form $y = x^{\frac{1}{n}}$

Die Funktion $f: y = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist nur definiert für positive x.

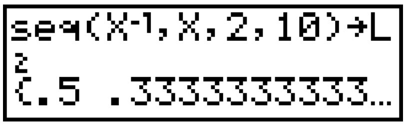
Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Der Graph der Umkehrrelation zu $p: y = x^2$ ergibt sich durch Spiegelung an der 1. Winkelhalbierenden.	$\boxed{\text{Y=}}$ `Y1=X²` aktivieren, $\boxed{\text{2nd}}$ `DRAW` `8:DrawInv` $\boxed{\text{VARS}}$ `Y-VARS` `1:Function...` $\boxed{\text{ENTER}}$ `1:Y1` $\boxed{\text{ENTER}}$ Der durchgezogene Graph stellt keine Funktion dar! $\boxed{\text{2nd}}$ `DRAW` `1:ClrDraw` löscht den Graphen wieder.	 `DrawInv Y1` 
Die Umkehrfunktion zu $p: y = x^2$ erhält man als $p^{-1}: x = y^2$ bzw. $p^{-1}: y = x^{\frac{1}{2}}$. $D = \mathbb{R}^+$, $W = \mathbb{R}^+$, der Graph ist also nur der positive Ast obiger Umkehrrelation.	$\boxed{\text{Y=}}$ `Y2=X^(1/2)` $\boxed{\text{GRAPH}}$	
Die Kurvenschar $p_n^{-1}: y = x^{\frac{1}{n}}$; $n \in \mathbb{N}$, $D = \mathbb{R}^+$ stellt die Umkehrfunktionen zu $p_n: y = x^n$; $n \in \mathbb{N}$, $D = \mathbb{R}^+$dar.	`Y3=X^({2,3,4,5,6,7}^-1)`	

1.2.4 Allgemeine Potenzfunktionen der Form $y = x^a$

$f: y = x^{\frac{m}{n}}$; $m \in$ Z, $n \in \mathbb{N}$ und $m \neq n$

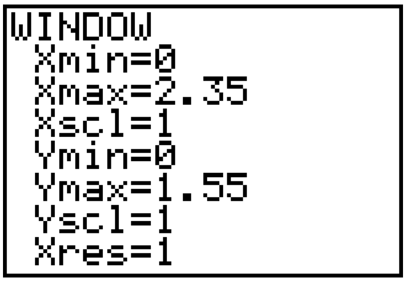
stellt eine allgemeine Gleichung einer Potenzfunktion dar. Sie lässt sich erweitern auf

$f: y = x^a$; $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Die Werte $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \frac{1}{10}$ werden mit `seq(` als Zahlenfolge erzeugt und auf die Listenvariable `L2` gespeichert.	$\boxed{\text{2nd}}$`CATALOG`, dann blättern bis `seq(` `seq(X`$\boxed{x^{-1}}$`,X,2,10)` $\boxed{\text{STO▶}}$$\boxed{\text{2nd}}$`L2`	 `seq(X⁻¹,X,2,10)→L2` `{.5 .3333333333...`

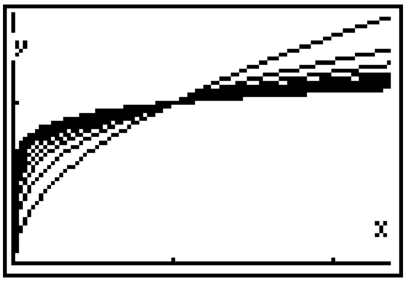
Damit lässt sich eine Funktionsschar der Form $y_n = x^{\frac{1}{n}},\ n \in [2;10]$ erzeugen.

Fensterdaten einstellen



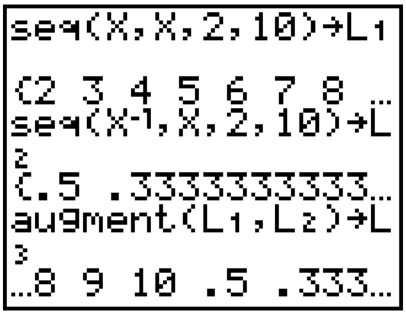
```
WINDOW
 Xmin=0
 Xmax=2.35
 Xscl=1
 Ymin=0
 Ymax=1.55
 Yscl=1
 Xres=1
```

Y=
Y2=X^ʟ2
GRAPH



Die Folge
ʟ1={2,3,4,5,6,7,8,9,10}
wird zusammen mit ʟ2 zu ʟ3 zusammengefasst. Die Funktionsgleichung Y3=X^ʟ3 repräsentiert damit ein Schar allgemeiner Potenzfunktionen mit Exponenten aus $\mathbb{R}^+$.

...2nd LIST OPS
9:augment(2nd ʟ1
, 2nd ʟ2) STO▸ 2nd ʟ3
Die Anzeige der Liste ist zu lang für den Bildschirm: mit ▶ und ◀ kann man nach rechts und links „scrollen”.

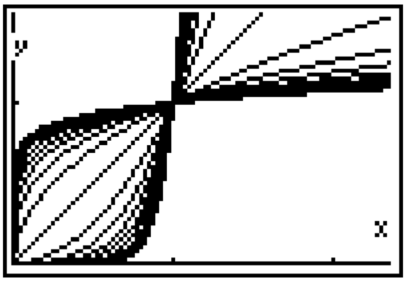


```
seq(X,X,2,10)→L₁
{2 3 4 5 6 7 8 …
seq(X⁻¹,X,2,10)→L
₂
{.5 .3333333333…
augment(L₁,L₂)→L
₃
…8 9 10 .5 .333…
```

Y=
Y1=X^ʟ3

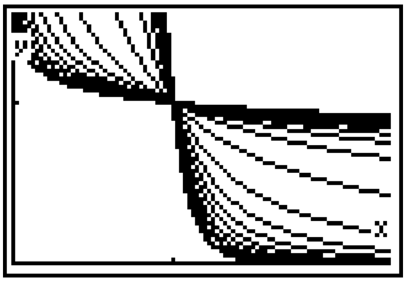
```
 Plot1 Plot2 Plot3
\Y₁=X^L₃
```

GRAPH



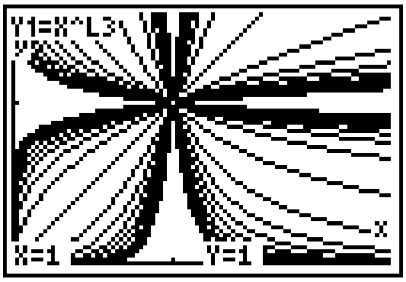
Fügt man in der Funktionsgleichung Y3 ein negatives Vorzeichen ein zu Y3=X^-ʟ3, so ergibt sich damit ein Schar allgemeiner Potenzfunktionen mit Exponenten aus $\mathbb{R}^-$.

Y=
Y2=X^(-)ʟ3



Die Graphen aller dieser Potenzfunktionen gehen durch den Punkt *A*(1|1)!

TRACE 1 ENTER
▲▲▲...
▼▼▼...

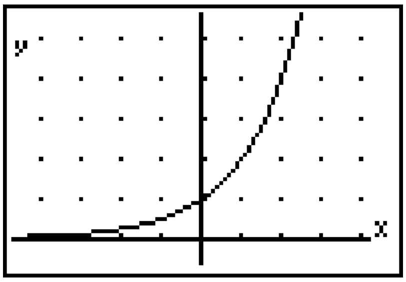
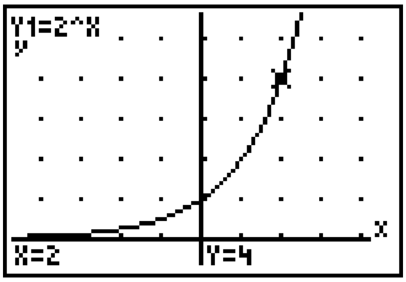
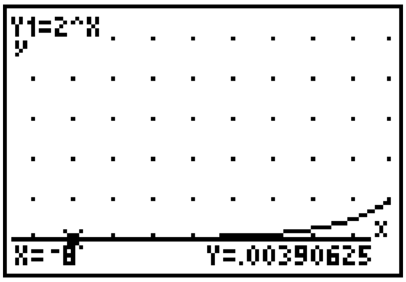


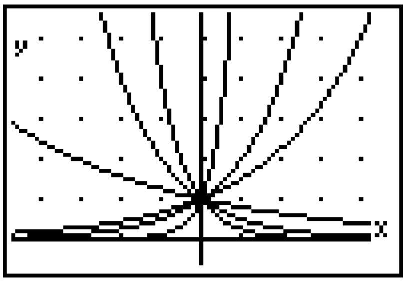
2 Exponential- und Logarithmusfunktion

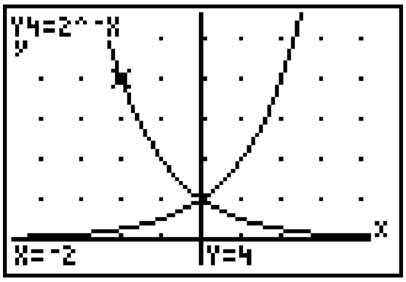
2.1 Exponentialfunktion

Eine Funktion, bei der die Variable x als Exponent einer Potenz vorkommt, heißt Exponentialfunktion:

$f: y = a^x;\ a \in \mathbb{R}^+$; Definitionsmenge $x \in \mathbb{R}$, Wertemenge $y \in \mathbb{R}^+$.

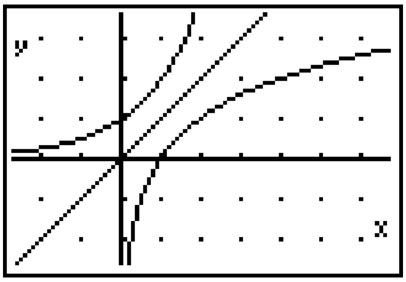
Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Die Exponentialfunktion $y = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$, verdoppelt ihren y-Wert pro Schritt von $\Delta x = 1$.	`y1=2^x` `GRAPH`	
Mit `TRACE` kann man die Kurve in positiver oder negativer x-Richtung verfolgen.	`TRACE`, z. B. `2` `ENTER` ergibt den Punkt $P(2\|4)$.	
	◀◀◀ ... in negativer x-Richtung nähert sich die Kurve immer stärker der x-Achse - diese bildet eine Asymptote.	

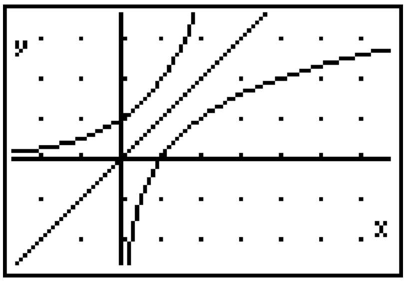
Schar von Exponentialfunktionen
$y = a^x;\ a \in \mathbb{R}^+$;
alle Graphen gehen durch den Punkt $A(0\|1)$, da $a^0 = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$.
	Beispiele für Werte von a:
	`y2={.8,1/2,1/4,10,2,3/2}^x`
	`GRAPH`
		

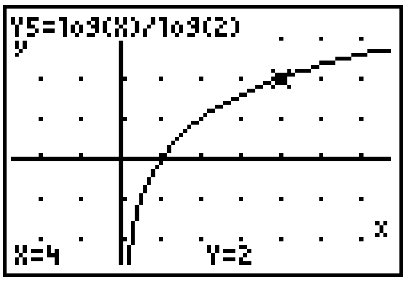
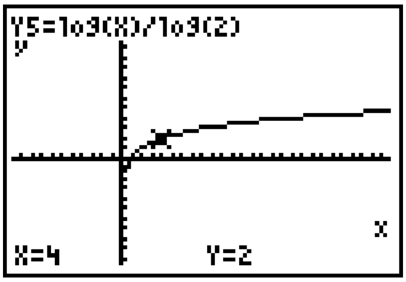
Bei der Spiegelung von $y = a^x$ an der y-Achse wird die Variable x durch -x ersetzt:
$y = a^{-x} \Leftrightarrow y = \frac{1}{a^x} \Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$
	Beispiel:
	`Y1=2^X`
	`Y2=(1/2)^X`
	sind offenbar achsensymmetrisch bzgl. der y-Achse.
		

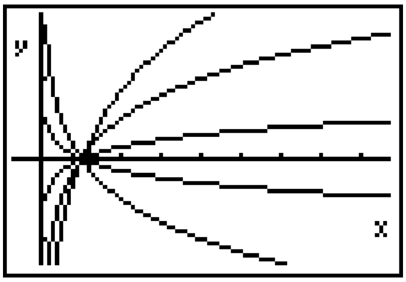
2.2 Logarithmusfunktion

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display

Umkehrrelation zu $y = 2^x$:
$x = 2^y$
nach y auflösen ergibt:
$y = \log_2 x$
(Logarithmus von x zur Basis 2).
	`Y=`
	`Y1=2^X`
	`Y2=X`
	`GRAPH`
	`2nd` `DRAW`
	`8:DrawInv`
	`VARS` `Y-VARS`
	`1:Function 1:Y1`
		

Da der TI-83 nur den Logarithmus zur Basis 10 kennt, muss umgerechnet werden:
$\log_2 x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 2}$.
	`2nd` `DRAW`
	`1:ClrDraw`
	`Y=`
	`Y1=2^X`
	
	`Y2=log(X)/log(2)`
	`GRAPH` ergibt den gleichen Graphen wie oben!
		

	`TRACE` zeigt die bzgl. $y = 2^x$ gespiegelten Punkte.	 Y5=log(X)/log(2) X=4 Y=2
Der Graph zeigt: die y-Achse ist Asymptote, Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}^+$, Wertebereich $y \in \mathbb{R}$.	Mit `ZOOM` den Ausschnitt vergrößern.	 Y5=log(X)/log(2) X=4 Y=2

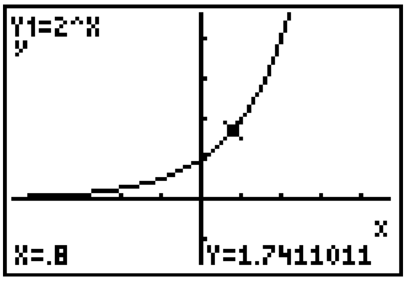
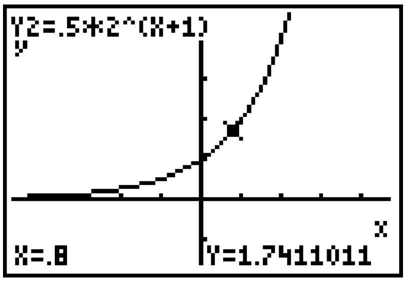
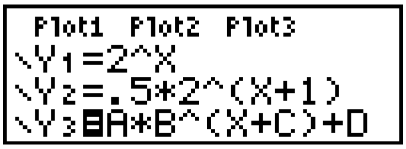
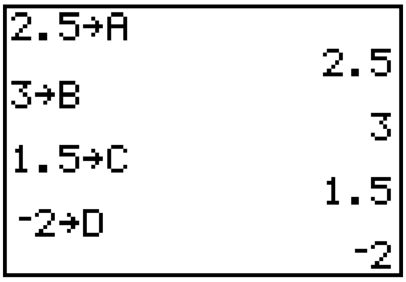
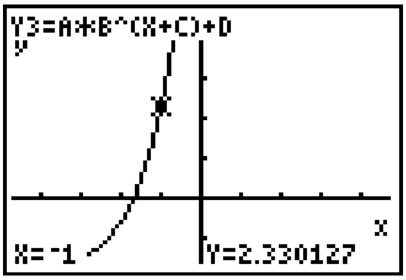
Schar von Logarithmuskurven:
alle Graphen gehen durch den Punkt $A(1\|0)$ und haben die y-Achse als Asymptote.
	`Y=`
	`Y3=log(X)/log({.1,.5,1.5,2,10})`
	`GRAPH`
		

2.3 Abbilden von Exponential- und Logarithmusfunktionen

Erhöht man bei der Funktion $y = 2^x$ den x-Wert um 1, so ergibt sich:
$y = 2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^x$.
Würde man den Graphen der Funktion $y = 2^x$ um 1 nach links verschieben und dann die y-Werte halbieren, so ergäbe sich wieder die gleiche Graph.

Allgemein:

$$f:\ y = a^x \overset{\vec{v}}{\mapsto} f' \text{ mit } f':\ y = a^{x+v_x} + v_y = a^{v_x} \cdot a^x + v_y$$

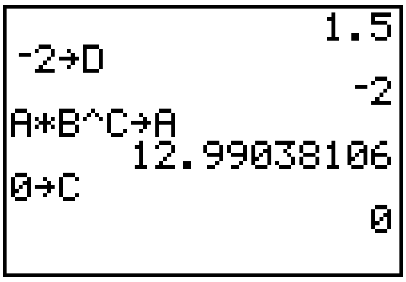
Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: Die zwei Funktionen $y = 2^x$ und $y = \frac{1}{2} \cdot 2^{x+1}$ ergeben denselben Graphen und sind identisch.	$\boxed{\text{Y=}}$ Y1=2^X Y2=.5*2^(X+1) $\boxed{\text{GRAPH}}$ beide Graphen werden gezeichnet, $\boxed{\text{TRACE}}\boxed{\blacktriangle}\boxed{\blacktriangledown}$ ergibt jeweils die gleichen y-Koordinaten, d. h. beide Graphen sind identisch	 Plot1 Plot2 Plot3 \Y1=2^X \Y2=.5*2^(X+1)  Y1=2^X X=.8 Y=1.7411011  Y2=.5*2^(X+1) X=.8 Y=1.7411011
$f:\ y = a \cdot b^{x+c} + d$		 Plot1 Plot2 Plot3 \Y1=2^X \Y2=.5*2^(X+1) \Y3=A*B^(X+C)+D
Die Formvariablen a, b, c und d werden wie folgt belegt: a = 2,5 b = 3 c = 1,5 d = -2	2.5$\boxed{\text{STO►}}\boxed{\text{ALPHA}}$A 3$\boxed{\text{STO►}}\boxed{\text{ALPHA}}$B 1.5$\boxed{\text{STO►}}\boxed{\text{ALPHA}}$C $\boxed{\text{(-)}}$2$\boxed{\text{STO►}}\boxed{\text{ALPHA}}$D	 2.5→A 2.5 3→B 3 1.5→C 1.5 -2→D -2
Graph der Funktion $y = 2,5 \cdot 3^{x+1,5} - 2$	$\boxed{\text{GRAPH}}$ $\boxed{\text{TRACE}}$	 Y3=A*B^(X+C)+D X=-1 Y=2.330127

Die Formvariablen a und c werden geändert:
$a \cdot b^c$ als neuer Wert von a
$c = 0$

$$y = a \cdot b^c \cdot b^x + d \text{ bzw.}$$
$$y = 2,5 \cdot 3^{1,5} \cdot 3^x - 2$$

ALPHA A × ALPHA B
^ALPHA C
STO▶ ALPHA A

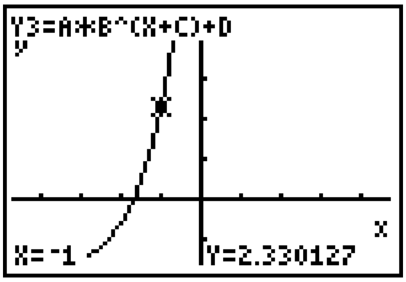
0 STO▶ ALPHA C



```
                1.5
-2→D
                 -2
A*B^C→A
        12.99038106
0→C
                  0
```

ergibt den gleichen Graphen, wie sich z. B. mit TRACE leicht nachprüfen lässt.

GRAPH
TRACE



```
Y3=A*B^(X+C)+D
X=-1        Y=2.330127
```

Arbeitsschritte Tastenfolge Display

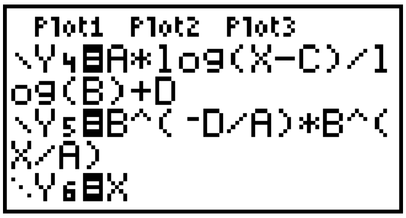
Bei der Funktion

$$f: y = a \cdot \log_b(x - c) + d$$

die Variablen x und y vertauschen, die Gleichung dann nach y auflösen (dies ergibt die Umkehrfunktion):

$$f^{-1}: y = b^{-\frac{d}{a}} \cdot b^{\frac{y}{a}}$$

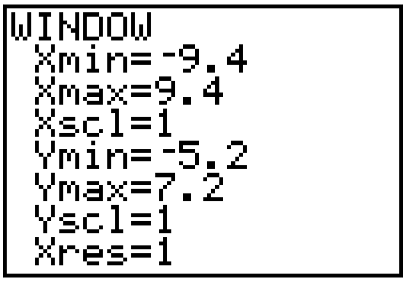
Beide Funktionsterme im Y=-Editor eingeben, dabei die Formvariablen a, b, c und d verwenden.



```
 Plot1  Plot2  Plot3
\Y4■A*log(X-C)/l
og(B)+D
\Y5■B^(-D/A)*B^(
X/A)
∵Y6■X
```

Mit welchen Werten die Formvariablen a, b, c und d dabei belegt sind, spielt keine Rolle.

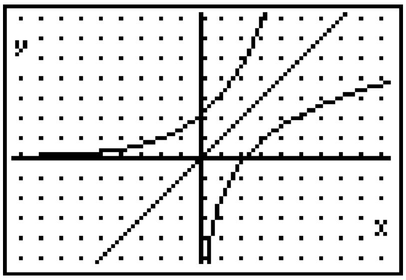
Bildschirmfenster geeignet wählen



```
WINDOW
 Xmin=-9.4
 Xmax=9.4
 Xscl=1
 Ymin=-5.2
 Ymax=7.2
 Yscl=1
 Xres=1
```

Man sieht, dass die Funktionsgraphen zur 1. Winkelhalbierenden symmetrisch sind f und f^{-1} also tatsächlich Umkehrfunktionen sind.

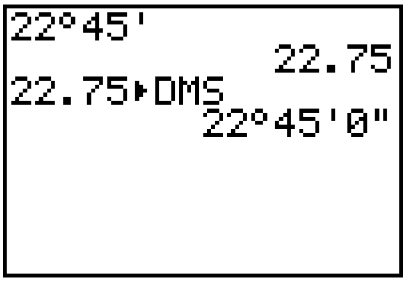
GRAPH



3 Trigonometrie

3.1 Polarkoordinaten, Sinus und Kosinus

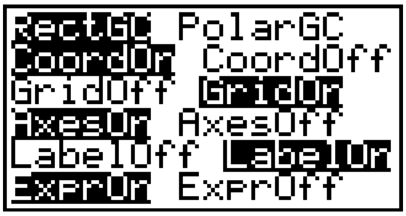
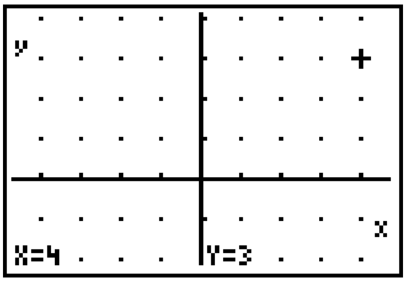
3.1.1 Winkel in Grad

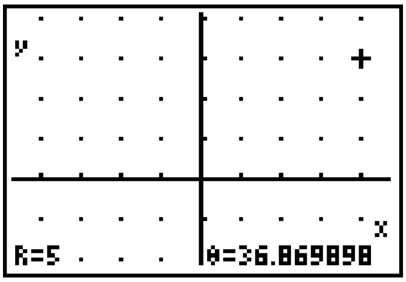
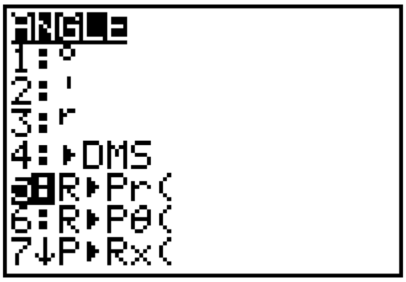
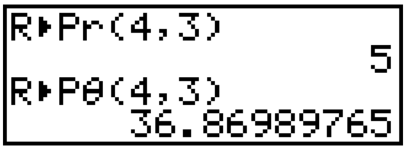
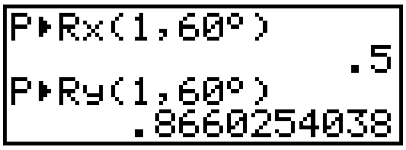
Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Voreinstellung der Winkel auf Gradmaß.	$\boxed{\text{MODE}}$, dann mit Cursor $\boxed{▼}$ und $\boxed{▶}$ die Option `Degree` auswählen und mit $\boxed{\text{ENTER}}$ bestätigen.	 Normal Sci Eng Float 0123456789 Radian Degree
Bruchteile von Winkelgraden können entweder durch Dezimalstellen oder in Bogenminuten (') und Bogensekunden (") angegeben werden. 22,75° = 22°45'0". Der TI-83 gibt Teile von Winkelgraden automatisch in Dezimalstellen aus.	Die Zeichen ° und ' sowie der Umwandlungsoperator `▸DMS` sind im Menü $\boxed{\text{2nd}}$ `ANGLE` zu finden.	 22°45' 22.75 22.75▸DMS 22°45'0"

3.1.2 Definition der Polarkoordinaten

Im kartesischen Koordinatensystem wird die Lage eines Punkt durch zwei Zahlen x und y, nämlich seinen Abstand in x-Richtung (Abszisse) bzw. y-Richtung (Ordinate) von den Achsen angegeben. Beispiel: $P(4|3)$.

In Polarkoordinaten wird der Punkt P durch zwei andere Zahlen festgelegt: seinen Abstand r zum Ursprung O und den Winkel θ der Halbgeraden $[OP$ gegenüber der positiven x-Achse. Derselbe Punkt P hat die Polarkoordinaten $P(5|36{,}869898°)$.

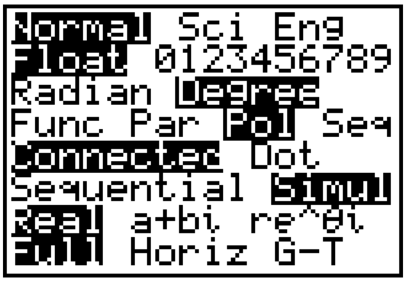
Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Anzeige des Cursors im Koordinatensystem auf <u>kartesische Koordinaten</u> einstellen;	$\boxed{\text{2nd}}$ `[FORMAT]` `RectGC`	 RectGC PolarGC CoordOn CoordOff GridOff GridOn AxesOn AxesOff LabelOff LabelOn ExprOn ExprOff
dann mit Cursortasten Fadenkreuz auf den Punkt P bewegen. Dabei werden die Koordinaten x und y des Fadenkreuzes am unteren Rand des Displays angezeigt.	$\boxed{\text{GRAPH}}$, $\boxed{▶}\boxed{▶}$. . . $\boxed{▲}\boxed{▲}$. . . Anzeige der Koordinaten `x=4, y=3`	 X=4 Y=3

Anzeige des Cursors im Koordinatensystem auf Polarkoordinaten einstellen;	[2nd] [FORMAT] PolarGC GridOn AxesOn LabelOn	 RectGC PolarGC CoordOn CoordOff GridOff GridOn AxesOn AxesOff LabelOff LabelOn ExprOn ExprOff
dann mit Cursortasten Fadenkreuz auf den Punkt *P* bewegen. Dabei werden die Koordinaten *r* und *θ* des Fadenkreuzes am unteren Rand des Display angezeigt.	[GRAPH], [▶][▶]. . . [▲][▲]. . . Anzeige der Koordinaten R=5, θ=36.869898	 R=5 θ=36.869898
Die Umwandlung von kartesischen in Polarkoordinaten ist auch über das Menü [2nd] **ANGLE** möglich.	Im Menü [2nd] ANGLE Punkt 5:R▶Pr(mit [ENTER] auswählen,	
Aus *P*(4|3) (kartesisch) ergibt sich *P*(5|36,87°) (polar).	dann 4,3) [ENTER] ergibt r, analog R▶Pθ(4,3) für θ.	 R▶Pr(4,3) 5 R▶Pθ(4,3) 36.86989765
Ebenso geht die Umwandlung von Polarkoordinaten in kartesische: *A*(1|60°) ergibt *A*(0,5|0,87).	Das Zeichen ° ist ebenfalls im Menü [2nd] ANGLE zu finden. Es ist zur Kennzeichnung des Winkels aber nicht notwendig.	 P▶Rx(1,60°) .5 P▶Ry(1,60°) .8660254038

3.1.3 Der Einheitskreis in Polarkoordinaten, Sinus und Kosinus

Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ des Punktes *P*(1|θ) hat die Länge 1 und den Richtungswinkel θ. Ein solcher Vektor heißt Einheitsvektor $\vec{e}$. Alle Punkte *P*(1|θ) für $\theta \in [0°;360°[$ liegen auf dem Einheitskreis *k*(*O*;1) um den Ursprung *O* mit dem Radius 1.

Die Funktionsgleichung des Einheitskreises in einem Polarkoordinatensystem ist sehr einfach: *r* = 1 (konstanter Radius 1).

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Voreinstellungen für die Darstellung von Funktionen	[MODE] Winkel: Degree Funktionen: Pol Die gewählten Einstellungen werden mit [ENTER] bestätigt.	 Normal Sci Eng Float 0123456789 Radian Degree Func Par Pol Seq Connected Dot Sequential Simul Real a+bi re^θi Full Horiz G-T

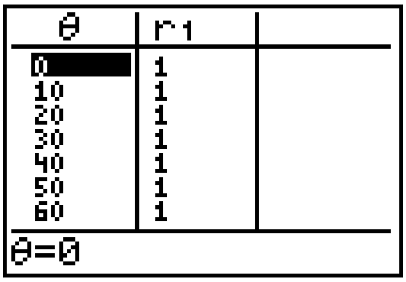
Eingabe der Funktionsgleichung des Einheitskreises

Y=
für `r1=1` ENTER
eingeben

```
 Plot1  Plot2  Plot3
\r1 =1
\r2 =
```

Die Wertetabelle zeigt für `r1` konstanten Wert 1.

2nd `[TABLE]`



θ	r1
0	1
10	1
20	1
30	1
40	1
50	1
60	1

θ=0

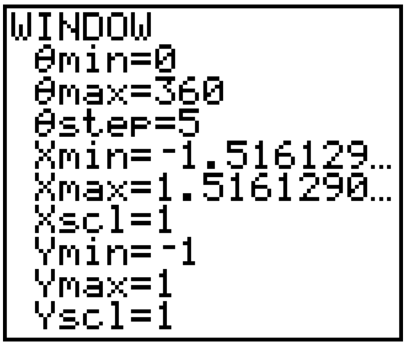
Damit die Einheiten auf den Achsen am Bildschirm gleiche Länge haben, müssen das *x*-Intervall und das *y*-Intervall sich verhalten wie 47/31. Wenn `ymin` = -1 und `ymax` = 1, so ergibt sich für

`xmin`=$-\frac{47}{31} \approx -1,5161290322581$

und für

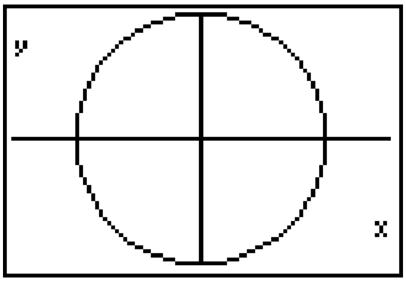
`xmax`=$\frac{47}{31} \approx 1,5161290322581$

WINDOW
`θmin=0`
`θmax=360`
`θstep=5`
`Xmin=`(-)`47`÷`31`
`Xmax=47`÷`31`
`Xscl=1`
`Ymin=`(-)`1`
`Ymax=1`
`Yscl=1`
Ein entsprechendes Verhältnis der Einheiten auf den Achsen ergibt sich mit ZOOM `5:ZSquare`



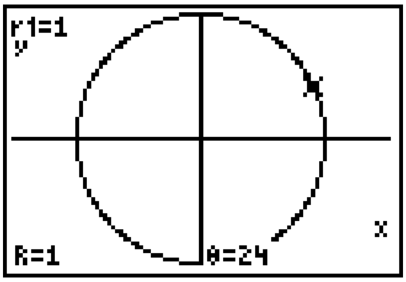
```
WINDOW
 θmin=0
 θmax=360
 θstep=5
 Xmin=-1.516129…
 Xmax=1.5161290…
 Xscl=1
 Ymin=-1
 Ymax=1
 Yscl=1
```

GRAPH



Mit TRACE kann man nun auf dem Kreis „entlangfahren” und die Koordinaten der Punkte des Kreises anzeigen lassen. Für jeden Winkel θ ergibt sich der Radius `r=1`.

TRACE ▶▶... oder ◀◀...

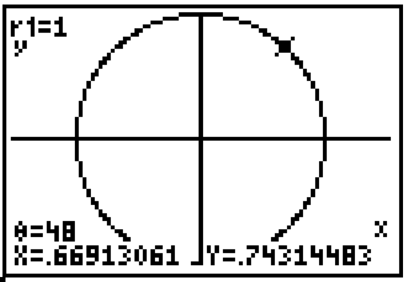


Viel interessanter ist es, wenn man das Anzeigeformat „kartesisch” für den Cursorpunkt wählt...

2nd `[FORMAT]`
`RectGC`

und erneut dem Kreis entlang fährt: es werden die Polarkoordinaten von *P*(1|48°) angezeigt und gleichzeitig seine kartesischen Koordinaten *P*(0,66913061|0,74314483).

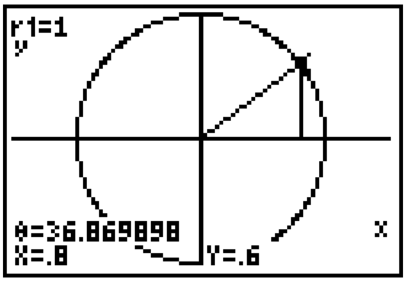
`TRACE` `48` `ENTER`



> Die *y*-Koordinate von *P*(1|α) heißt sin α (Sinus von α),
> die *x*-Koordinate von *P*(1|α) heißt cos α (Kosinus von α).

So ergibt sich z. B.
$\sin 48^\circ \approx 0,66913061$ und
$\cos 48^\circ \approx 0,74314483$ oder
$\sin 36,8698976458^\circ \approx 0,6$ und
$\cos 36,8698976458^\circ \approx 0,8$.
Damit lassen sich die Werte für Sinus und Kosinus am Einheitskreis mit `TRACE` ablesen.

`TRACE`
`36.8698976458`
`ENTER`



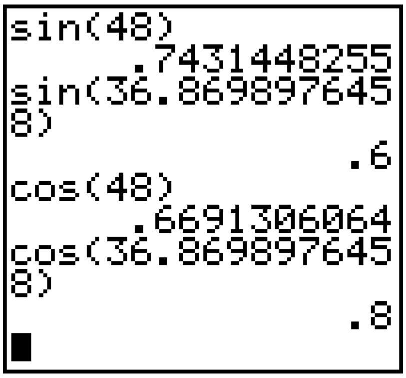
Die Werte der Winkelfunktionen Sinus und Kosinus für bestimmte Winkel lassen sich mit dem GTR auch direkt berechnen.

`sin(48)` `ENTER`

`sin(36.86989764` `58)` `ENTER`

`cos(48)` `ENTER`

`cos(36.86989764` `58)` `ENTER`



```
sin(48)
      .7431448255
sin(36.869897645
8)
               .6
cos(48)
      .6691306064
cos(36.869897645
8)
               .8
█
```

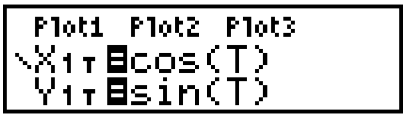
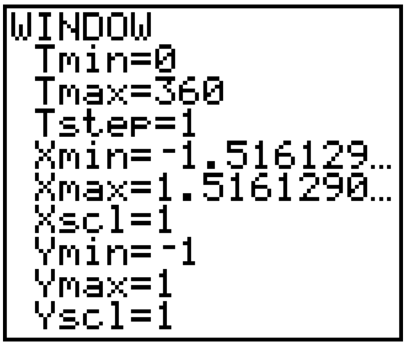
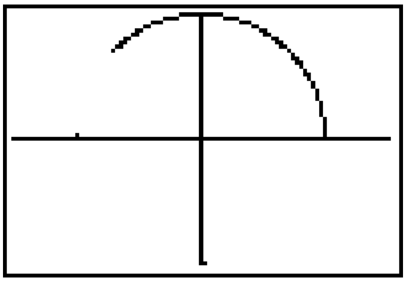
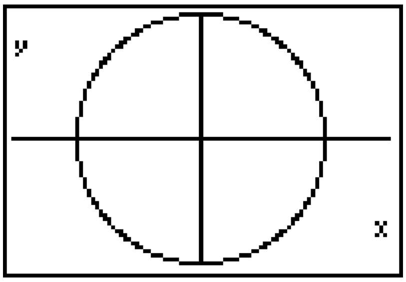
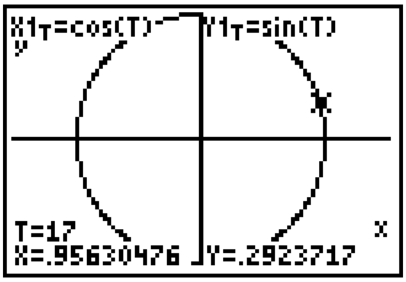
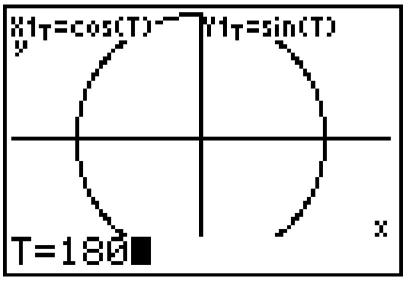
Hinweis:
Schreibweise für Winkelfunktionen auf Papier: Argument ohne Klammern:
sin 23,9°,   cos 90°

Schreibweise des TI-83: Argument in Klammern:
`sin(23,9)`
`cos(90)`

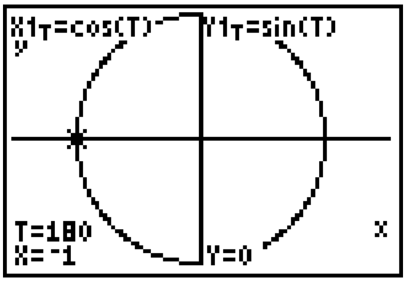
3.1.4 Der Einheitskreis in kartesischen Koordinaten

Umgekehrt muss dann ein Punkt mit den kartesischen Koordinaten *P*(cos 48°|sin 48°) die Polarkoordinaten *P*(1|48°) haben, oder *Q*(cos α|sin α) allgemein *Q*(1|α). Der Einheitskreis lässt sich also auch in einem kartesischen Koordinatensystem zeichnen als Graph einer Funktion in Parameterdarstellung:

$x = \cos\alpha$
$y = \sin\alpha.$

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Als Voreinstellung für die Darstellung von Funktionen Parameterdarstellung wählen	MODE Winkel: **Degree** Funktionen: **Par**	
Beim TI-83 heißt der Parameter, der den Winkel angibt, T.	Y=, für x_{1T}=cos(T) y_{1T}=sin(T) ENTER eingeben	 Plot1 Plot2 Plot3 \X_{1T}=cos(T) Y_{1T}=sin(T)
Bildschirmeinstellungen entsprechend wie oben.	WINDOW, Daten eingeben	 WINDOW Tmin=0 Tmax=360 Tstep=1 Xmin=-1.516129… Xmax=1.5161290… Xscl=1 Ymin=-1 Ymax=1 Yscl=1
Der Einheitskreis wird entgegen dem Uhrzeigersinn gezeichnet. Mit ON kann das Zeichnen abgebrochen, mit GRAPH wieder neu gestartet werden.	GRAPH, ... ON	
	GRAPH	
Die *x*- und *y*-Koordinaten der Punkte des Einheitskreises sind mit TRACE in Schritten von Δt abzulesen.	TRACE	 X_{1T}=cos(T) Y_{1T}=sin(T) T=17 X=.95630476 Y=.2923717
Gewünschte Werte für *t* lassen sich auch direkt eingeben. Damit lassen sich auch Funktionswerte enzeigen, deren x-Koordinate bei der gewählten Fenstereinstellung nicht exakt auf einen Bildpunkt fällt.	TRACE 180...	 X_{1T}=cos(T) Y_{1T}=sin(T) T=180

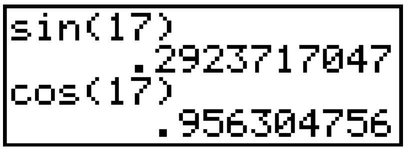
. . . ENTER



Sinus und Kosinus sind natürlich auch direkt zu berechnen.

`sin(17)` ENTER

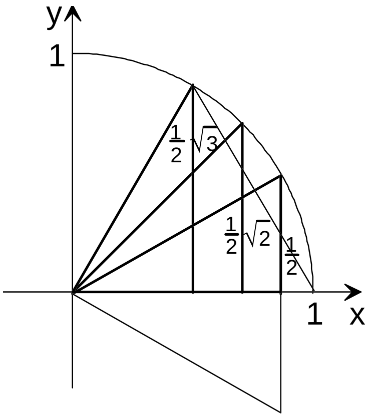
`cos(17)` ENTER



```
sin(17)
          .2923717047
cos(17)
           .956304756
```

3.1.5 Winkelfunktionen Sinus und Kosinus von besonderen Winkelmaßen

Die Winkel $\theta \in \{0°; 30°; 45°; 60°; 90°\}$ kommen in gleichschenklig-rechtwinkligen und halben gleichseitigen Dreiecken vor, die vom Einheitsvektor und seinen kartesischen Koordinaten gebildet werden.



Arbeitsschritte Tastenfolge Display

Der TI-83 wird als „normaler” numerischer Taschenrechner zur Berechnung von Sinus und Kosinus für bestimmte Winkel verwendet.

`sin(0)` ENTER

`sin(30)` ENTER

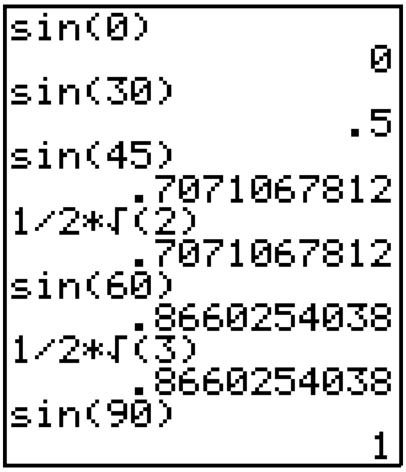
`sin(45)` ENTER

`1/2*√(2)` ENTER

`sin(60)` ENTER

`1/2*√(3)` ENTER

`sin(90)` ENTER



```
sin(0)
                    0
sin(30)
                   .5
sin(45)
          .7071067812
1/2*√(2)
          .7071067812
sin(60)
           .866025403
1/2*√(3)
           .866025403
sin(90)
                    1
```

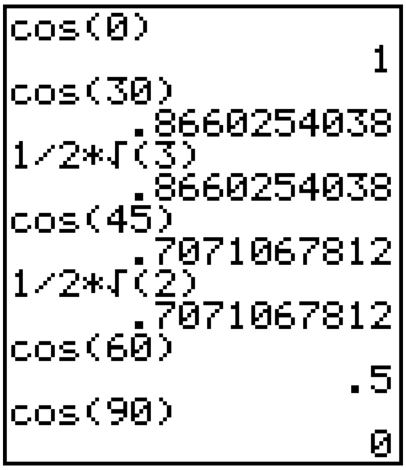
$$\sin 0^\circ \;= \cos 90^\circ \;= \tfrac{1}{2}\sqrt{0} \;= 0$$
$$\sin 30^\circ \;= \cos 60^\circ \;= \tfrac{1}{2}\sqrt{1} \;= \tfrac{1}{2}$$
$$\sin 45^\circ \;= \cos 45^\circ \;= \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$\sin 60^\circ \;= \cos 30^\circ \;= \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$\sin 90^\circ \;= \cos 0^\circ \;= \tfrac{1}{2}\sqrt{4} \;= 1$$

Es zeigt sich, dass - zumindest für diese Winkelmaße - die Komplementbeziehung gilt:

$\sin\alpha = \cos(90^\circ - \alpha)$ und

$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$

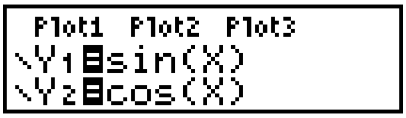
```
cos(0)       ENTER
cos(30)      ENTER
1/2*√(3)     ENTER
cos(45)      ENTER
1/2*√(2)     ENTER
cos(60)      ENTER
cos(90)      ENTER
```



```
cos(0)
                 1
cos(30)
        .8660254038
1/2*√(3)
        .8660254038
cos(45)
        .7071067812
1/2*√(2)
        .7071067812
cos(60)
                .5
cos(90)
                 0
```

sin(x) und cos(x) werden als Funktionsterme im Y= -Editor eingegeben.

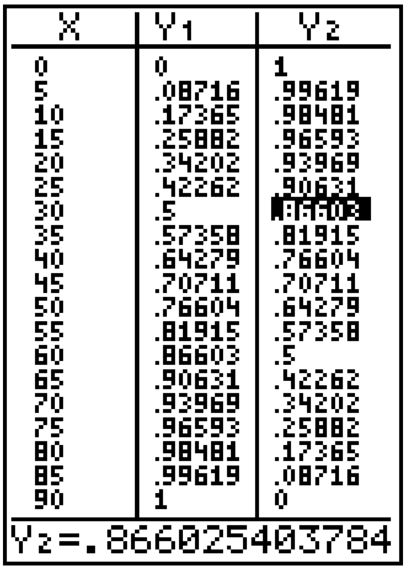
```
Y=
Y1=sin(x)
y2=cos(x)
```



```
  Plot1  Plot2  Plot3
\Y1=sin(X)
\Y2=cos(X)
```

Mit geeigneter Schrittweite `ΔTbl`, z. B. 5°, können die Funktionswerte von `sin(x)` und `cos(x)` durch „scrollen” mit den Cursortasten bestimmt werden.

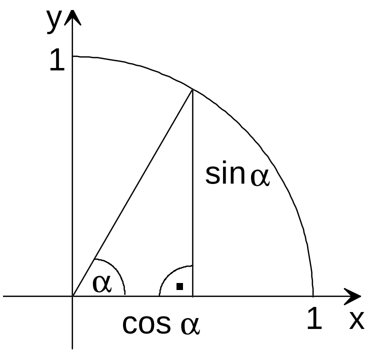
```
2nd [TABLE] ▲▲...
oder ▼▼...
```



```
  X   |  Y1    |  Y2
  0   | 0      | 1
  5   | .08716 | .99619
  10  | .17365 | .98481
  15  | .25882 | .96593
  20  | .34202 | .93969
  25  | .42262 | .90631
  30  | .5     | .86603
  35  | .57358 | .81915
  40  | .64279 | .76604
  45  | .70711 | .70711
  50  | .76604 | .64279
  55  | .81915 | .57358
  60  | .86603 | .5
  65  | .90631 | .42262
  70  | .93969 | .34202
  75  | .96593 | .25882
  80  | .98481 | .17365
  85  | .99619 | .08716
  90  | 1      | 0
Y2=.86602540378
```

Die Komplementbeziehung lässt sich hier für weitere Winkelmaße experimentell überprüfen.

3.1.6 Beziehungen für Sinus und Kosinus



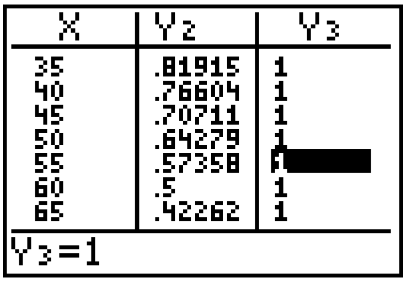
Arbeitsschritte Tastenfolge Display

Aus dem Satz des Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck im Einheitskreis ergibt sich die Beziehung
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

$\boxed{\text{Y=}}$ und
y3=sin(x)$\boxed{x^2}$+cos(x)$\boxed{x^2}$

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■sin(X)
\Y2■cos(X)
\Y3■sin(X)²+cos(
X)²
```

Auch diese Beziehung lässt sich für beliebige Winkelmaße experimentell überprüfen.



```
  X   | Y2     | Y3
35    | .81915 | 1
40    | .76604 | 1
45    | .70711 | 1
50    | .64279 | 1
55    | .57358 | 1
60    | .5     | 1
65    | .42262 | 1
Y3=1
```

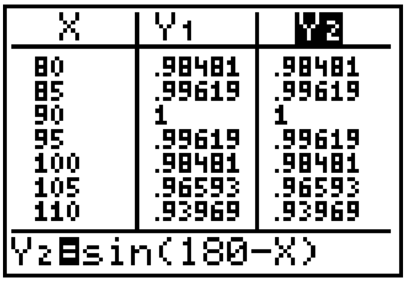
Aus dem Vergleich kongruenter Dreiecke im 1. bis 4. Quadranten des Einheitskreises ergeben sich die Beziehungen für $\alpha \in]0°;90°[$:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha$$

$\boxed{\text{Y=}}$
y1=sin(x)
y2=sin(180-x)
y3=-cos(x)
y4=cos(180-x)

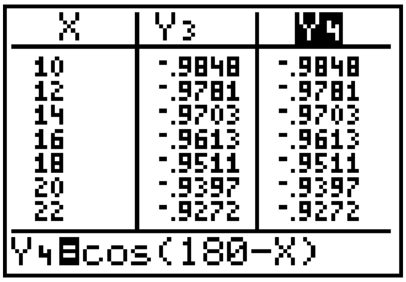
```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1■sin(X)
\Y2■sin(180-X)
\Y3■-cos(X)
\Y4■cos(180-X)
```

Durch geeignete Einstellung des Anfangswerts und der Schrittweite der Tabelle mit $\boxed{\text{2nd}}$TBLSET entstehen Vergleichstabellen.



```
  X   | Y1     | Y2
80    | .98481 | .98481
85    | .99619 | .99619
90    | 1      | 1
95    | .99619 | .99619
100   | .98481 | .98481
105   | .96593 | .96593
110   | .93969 | .93969
Y2■sin(180-X)
```

In diesen Tabellen kann mit dem Cursor navigiert und die Gleichheit der Terme exemplarisch nachgeprüft werden



```
  X   | Y3     | Y4
10    | -.9848 | -.9848
12    | -.9781 | -.9781
14    | -.9703 | -.9703
16    | -.9613 | -.9613
18    | -.9511 | -.9511
20    | -.9397 | -.9397
22    | -.9272 | -.9272
Y4■cos(180-X)
```

3.1.7 Bestimmung von Winkelmaßen trigonometrische Gleichungen sin α = *k* und cos α = *k*

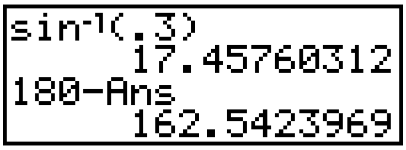
Da es im Intervall $\alpha \in [0°;360°[$ jeweils zwei Winkel in verschiedenen Quadranten gibt, die den gleichen Sinus- bzw. Kosinuswert haben, haben auch die Gleichungen sin α = *k* und cos α = *k*; $k \in [-1;1]$ i. a. zwei Lösungen. Diese Winkel stehen zueinander in obigen Beziehungen; der zweite Winkel kann danach aus dem ersten ermittelt werden.

Arbeitsschritte Tastenfolge Display

Beispiel: $\sin\alpha = 0,3$
gesucht ist der Winkel α mit $\alpha \in [0°;360°[$, der diese Gleichung erfüllt.

$\boxed{\text{2nd}}$sin^{-1}(.3)

180-$\boxed{\text{2nd}}$ANS



```
sin⁻¹(.3)
          17.45760312
180-Ans
          162.5423969
```

Nach der Beziehung
$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$
hat diese Gleichung 2 Lösungen im 1. und 2. Quadranten:
$\alpha_1 \approx 17,46°$ und $\alpha_2 \approx 162,54°$

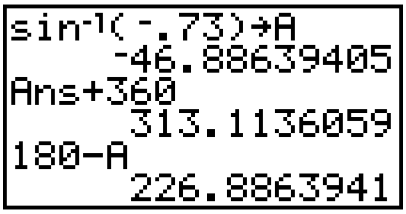
Beispiel: $\sin\alpha = -0,73$

Da der Rechner für α einen negativen Winkel (im 4. Quadranten) errechnet, müssen 360° addiert werden, damit der gleiche Winkel, aber mit positivem Vorzeichen entsteht. Es ergeben sich dann die Werte:
$\alpha_1 \approx 226,89°$ und $\alpha_2 \approx 313,11°$ im 3. und 4. Quadranten.

`[2nd] sin⁻¹ ( [(-)] .73 )`
`[STO▸] [ALPHA] A`

`+360`
Diese Eingabe genügt, da der Term mit dem Rechenzeichen „+” beginnt, wird automatisch die letzte Antwort davorgesetzt.

`180- [ALPHA] A`

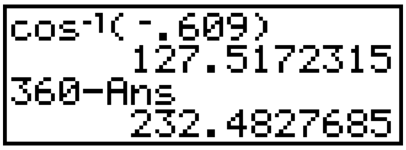


```
sin⁻¹(-.73)→A
     -46.88639405
Ans+360
      313.1136059
180-A
      226.8863941
```

Beispiel: $\cos\alpha = -0,609$
Lösung:
$\alpha_1 \approx 127,52°$ und $\alpha_2 \approx 232,48°$ im 2. und 3. Quadranten.

`[2nd] cos⁻¹ ( [(-)] .609 )`

`360- [2nd] ANS`

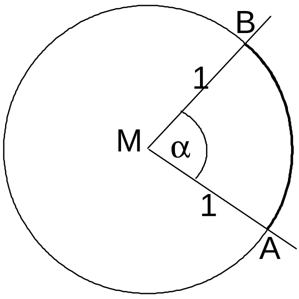


```
cos⁻¹(-.609)
      127.5172315
360-Ans
      232.4827685
```

3.2 Funktionen des Sinus, Kosinus und Tangens

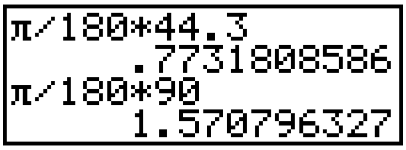
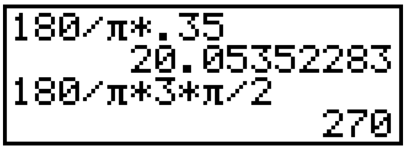
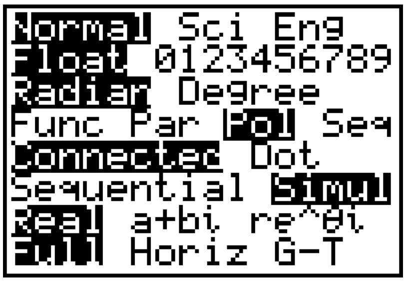
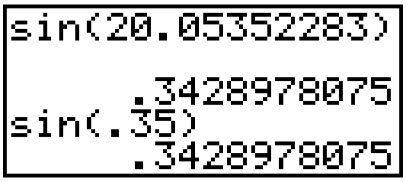
3.2.1 Winkel in Bogenmaß

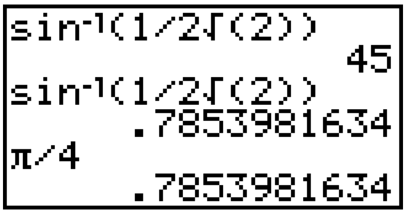
Zu einem Winkel mit dem Maß α gehört im Einheitskreis ein entsprechender Bogen $\overset{\frown}{AB}$ mit der Länge *b*.



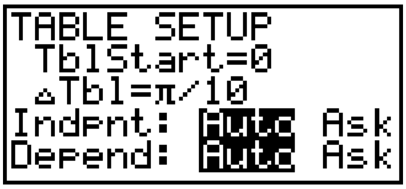
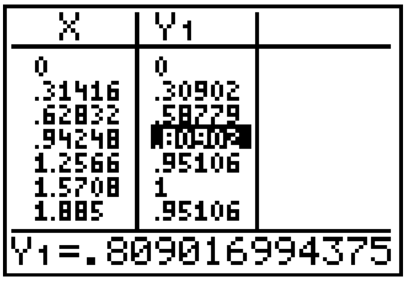
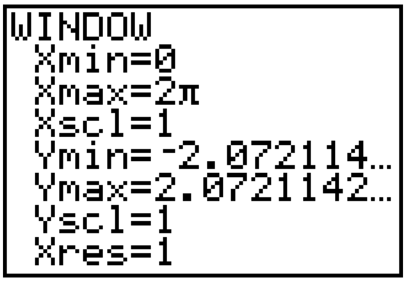
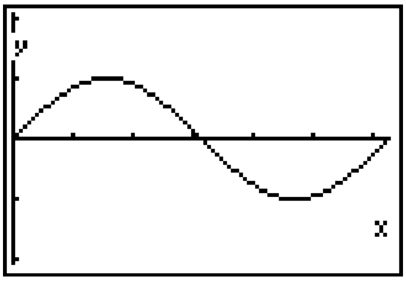
Mit der Maßzahl *b* der Länge dieses Bogens kann der Winkel ebenso festgelegt werden. Man nennt dies „Bogenmaß”.
Es ergibt sich die Umrechnungsformel:

Gradmaß		Bogenmaß
360°	≙	$2 \cdot \pi \cdot 1$ (Umfang des Einheitskreises)
1°	≙	$\frac{2 \cdot \pi}{360}$
α	≙	$\frac{\pi \cdot \alpha}{180^\circ}$

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Umrechnung von Gradmaß in Bogenmaß, z. B. 44,3°; 90°	2nd π ÷ 180 × 44.3 2nd ENTRY mit 90 überscheiben	 π/180*44.3 .7731808586 π/180*90 1.570796327
Umrechnung von Bogenmaß in Gradmaß, z. B. 0,35; $\frac{3\pi}{2}$	180 ÷ 2nd π × .35 2nd ENTRY mit 3 × 2nd π ÷ 2 überscheiben	 180/π*.35 20.05352283 180/π*3*π/2 270
Im Folgenden wird mit der Einstellung „Bogenmaß” („`Radian`”) gearbeitet.	MODE Winkel auf `Radian` einstellen	 Normal Sci Eng Float 0123456789 Radian Degree Func Par Pol Seq Connected Dot Sequential Simul Real a+bi re^θi Full Horiz G-T
	`sin(20.05352283)` und nach Umschalten auf Bogenmaß `sin(.35)` ergeben die gleichen Werte.	 sin(20.05352283) .3428978075 sin(.35) .3428978075

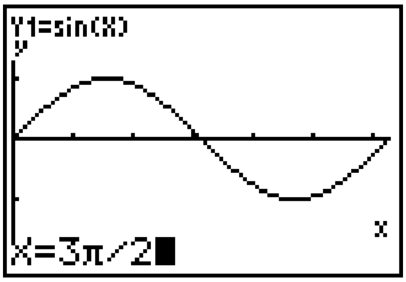
	$\sin^{-1}(1/2\sqrt{(2)})$ ergibt in Gradmaß 45°, (nach Umschalten) in Bogenmaß 0,7853981634 = π/4.	 sin⁻¹(1/2√(2)) 45 sin⁻¹(1/2√(2)) .7853981634 π/4 .7853981634

3.2.2 Sinusfunktion und Kosinusfunktion

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Die Werte für sin(*x*) können als Funktion von *x* betrachtet werden (*x* wird hier in Bogenmaß angegeben).	MODE Funktion auf Func, Winkel auf Radian einstellen	
Funktionsterm eingeben	Y= y1=sin(x)	
	2nd TBLSET TblStart=0 ΔTbl=2nd π/10	 TABLE SETUP TblStart=0 ΔTbl=π/10 Indpnt: Auto Ask Depend: Auto Ask
In der Wertetabelle lassen sich bei geeigneter Einstellung der Schrittweite gesuchte Funktionswerte ablesen.	2nd TABLE	 X Y1 0 0 .31416 .30902 .62832 .58779 .94248 .80902 1.2566 .95106 1.5708 1 1.885 .95106 Y1=.809016994375
	WINDOW Xmax ist hier als 2π eingegeben; sofort nach Bestätigung dieser Eingabe wird der Wert umgerechnet in numerische 6.28318...	 WINDOW Xmin=0 Xmax=2π Xscl=1 Ymin=-2.072114... Ymax=2.0721142... Yscl=1 Xres=1
Der Funktionsgraph ist die Sinuskurve. Die zwei Bögen mit positiven und negativen *y*-Werten (vom 1. bis zum 3. Nulldurchgang) erstrecken sich auf der *x*-Achse über eine Periode.	GRAPH	

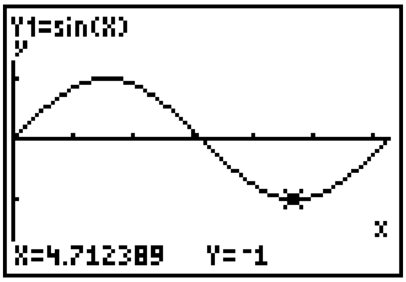
Natürlich können mit TRACE auch im Funktionsgraphen Funktionswerte numerisch bestimmt werden, z. B. $\sin\frac{3\pi}{2}$.

TRACE
3π ÷ 2 . . .

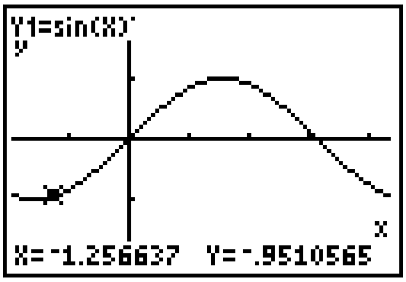

Y1=sin(X)
X=3π/2

Der gesuchte x-Werte kann zwar als Term eingegeben werden, der Rechner jedoch wandelt den Term sofort in eine Dezimalzahl um.

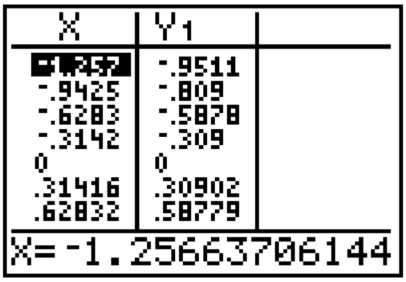
. . . ENTER


Y1=sin(X)
X=4.712389 Y=-1

Verfolgt man die Kurve mit TRACE in negativer *x*-Richtung (nach links) über 0 hinaus in den negativen *x*-Bereich, so zeigt sich, dass offenbar auch dort die Funktion sin *x* definiert ist. Dabei verschiebt sich das Achsenkreuz automatisch.


Y1=sin(X)
X=-1.256637 Y=-.9510565

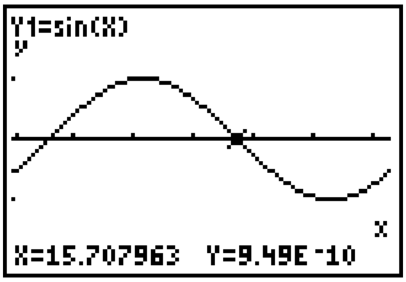
Dies kann man auch in der Wertetabelle verfolgen, indem in der *x*-Spalte mit dem Cursor nach oben über die Null hinaus gefahren wird.



X	Y1
-1.257	-.9511
-.9425	-.809
-.6283	-.5878
-.3142	-.309
0	0
.31416	.30902
.62832	.58779

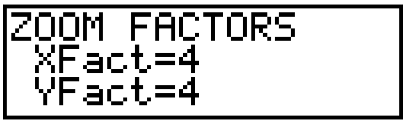
X=-1.25663706144

Entsprechend lässt sich die Funktion in positiver *x*-Richtung fortsetzen. Auch dort hat der Graph die gleiche typische Wellenform, die sich regelmäßig wiederholt.


Y1=sin(X)
X=15.707963 Y=9.49E-10

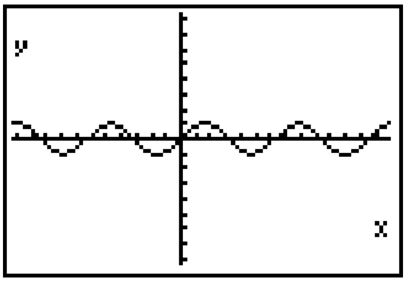
Die Funktion ist offenbar periodisch. Dies wird augenfällig, wenn der angezeigte Fensterausschnitt mit ZOOM vergrößert wird. Dazu werden zuerst die Vergrößerungsfaktoren eingestellt, z. B. 4.

ZOOM MEMORY
ENTER
4:SetFactors...
z. B.
XFact=4
YFact=4


ZOOM FACTORS
XFact=4
YFact=4

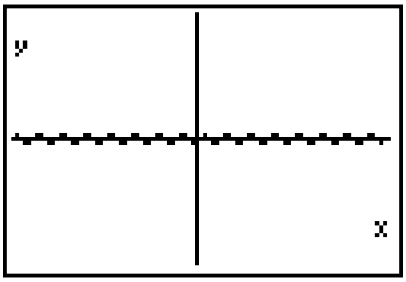
Die Vergrößerung des Ausschnitts zeigt mehr als vier Perioden,

ZOOM **3:Zoom Out**
ENTER ENTER (!)



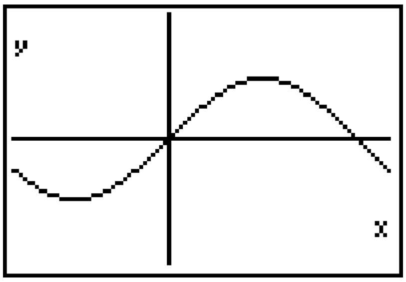
bzw. mehr als sechzehn Perioden.

ZOOM **3:Zoom Out**
ENTER ENTER (!)



Das Vergrößern lässt sich auch wieder rückgängig machen.

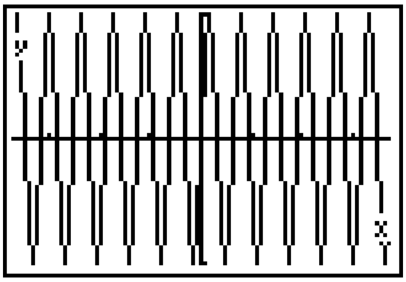
2mal die Tastenfolge
ZOOM **2:Zoom In**
ENTER ENTER



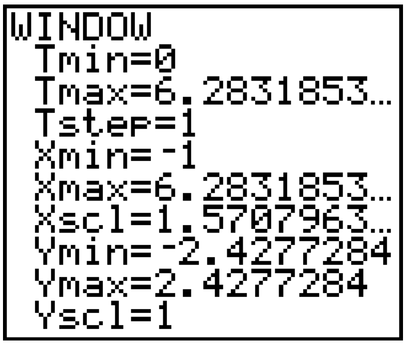
Dass die maximalen und minimalen *y*-Werte immer eins sind, wird z. B. bei folgenden Fenstereinstellungen deutlich:

Xmin=-36.9137..
Ymin=36.9137...

Ymin=-1
Ymax=1



Interessant ist es, die Sinuskurve dynamisch entstehen zu lassen als Projektion des rotierenden Einheitsvektors entlang der θ-Achse. Dazu können am TI-83 der Einheitskreis und die Sinuskurve gleichzeitig gezeichnet werden. Diese Darstellung erfordert den Parametermodus.

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
	MODE, Voreinstellung **Radian** und **Par**	
Für das Fenster wird *x* von -1 bis 2π gewählt. Der Parameter *t* läuft von 0 bis 2π.		 WINDOW Tmin=0 Tmax=6.2831853... Tstep=1 Xmin=-1 Xmax=6.2831853... Xscl=1.5707963... Ymin=-2.4277284 Ymax=2.4277284 Yscl=1

Eingabe des Einheitskreises
$x = \cos t$
$y = \sin t$ wie gehabt;
Sinuskurve „parametrisiert” als
$x = t$
$y = \sin t$.

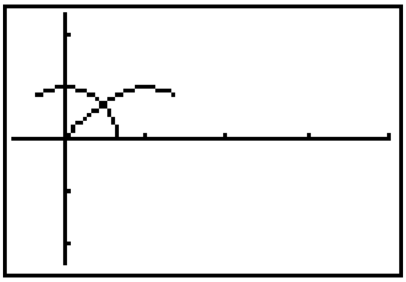
Y=

```
X1T=cos(T)
Y1T=sin(T)
X2T=T
Y2T=sin(T)
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
\X1T=cos(T)
 Y1T=sin(T)
\X2T=T
 Y2T=sin(T)
```

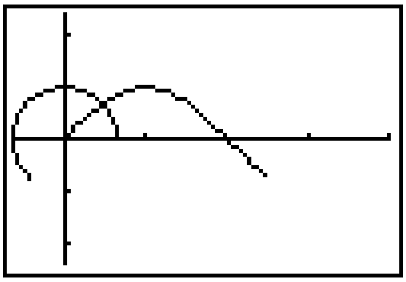
Während der Parameter t im Intervall $t \in [0; 2\pi[$ läuft, wachsen Einheitskreis und Sinuskurve gleichzeitig.

GRAPH, Zeichnen anhalten mit ON

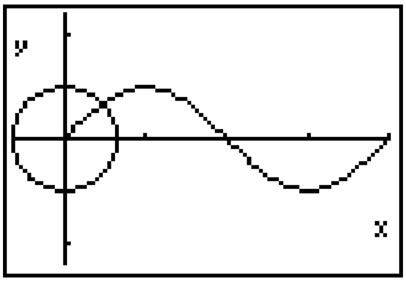


Beide Kurven haben den gleichen Term für die y-Koordinate; die Sinuskurve hat als x-Koordinate den Parameter t selbst, also die „abgewickelte” Bogenlänge des Punkts auf dem Einheitskreis.

Neuzeichnen mit GRAPH, Anhalten mit ON

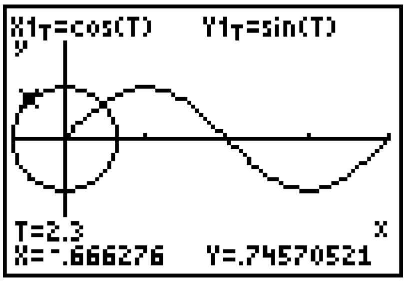


So wird die Entsprechung der Lage des „Zeichenstifts” auf dem Einheitskreis und seiner Projektion „nach rechts” augenfällig.



Mit TRACE kann jeweils auf einer der beiden Kurven entlanggefahren werden.

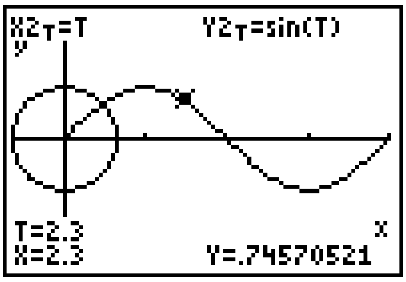
TRACE ▶▶▶. . .



```
X1T=cos(T)   Y1T=sin(T)
T=2.3
X=⁻.666276   Y=.74570521
```

Beim Wechseln der Kurven mit ▲ oder ▼ bleibt die y-Koordinate jeweils gleich.

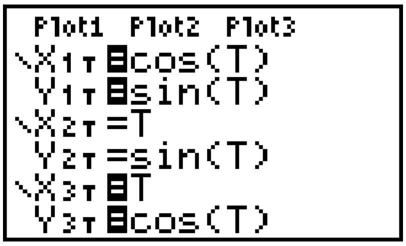
▲ oder ▼

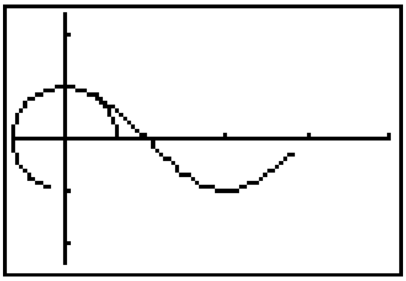
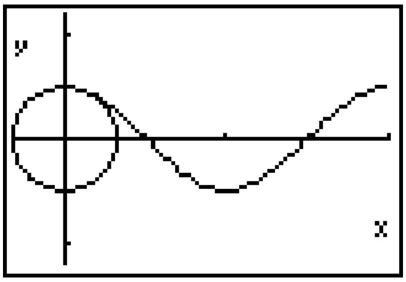


```
X2T=T        Y2T=sin(T)
T=2.3
X=2.3        Y=.74570521
```

Analog entstehen Wertetabelle und Graph der Kosinusfunktion:

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display

Terme für Kosinusfunktion entsprechend eingeben:
$x = t$
$y = \cos t$.
	`Y=`
	`X3T=T`
	`Y3T=cos(T)`
	Parameter `T` mit Taste `X,T,Θ,n`
		
		Plot1 Plot2 Plot3
		\X1T=cos(T)
		Y1T=sin(T)
		\X2T=T
		Y2T=sin(T)
		\X3T=T
		Y3T=cos(T)

Graphen zeichnen.	`GRAPH`, evtl. anhalten mit `ON`	
	`GRAPH`	

Natürlich können Sinus und Kosinus am TI-83 auch als Funktionen eines Winkels in Gradmaß dargestellt werden:

$y = \sin\alpha;\ \alpha \in [0°;360°[$ und

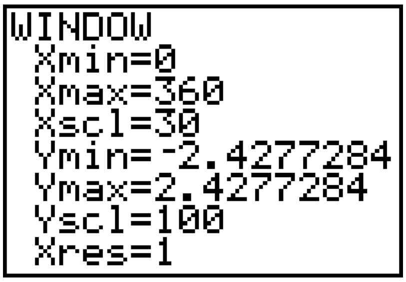
$y = \cos\alpha;\ \alpha \in [0°;360°[$.

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Voreinstellungen für Darstellung der Funktionen wählen	`MODE` Winkel: **Degree** Funktion: **Func**	

$y = \sin \alpha$,
$y = \cos \alpha$
	`Y=`
	`Y1=sin(X)`
	`Y2=cos(X)`
	Hinweis: der TI-83 lässt bei Funktionen im Modus `Func` als unabhängige Variable nur `X` zu, diese Variable wird mit Taste `X,T,Θ,n` oder mit `ALPHA` `X` erreicht.
		
		Plot1 Plot2 Plot3
		\Y1=sin(X)
		\Y2=cos(X)
		\Y3=
		\Y4=
		\Y5=
		\Y6=
		\Y7=

Fensterdaten geeignet einstellen

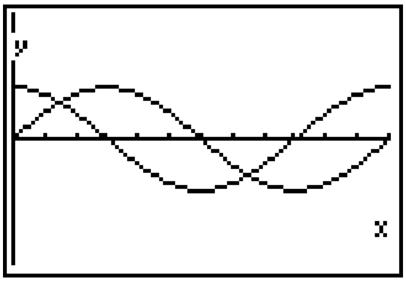
`WINDOW`



```
WINDOW
 Xmin=0
 Xmax=360
 Xscl=30
 Ymin=⁻2.4277284
 Ymax=2.4277284
 Yscl=100
 Xres=1
```

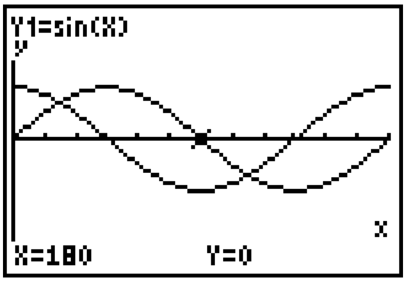
Beide Graphen im gleichen Koordinatensystem anzeigen.

`GRAPH`



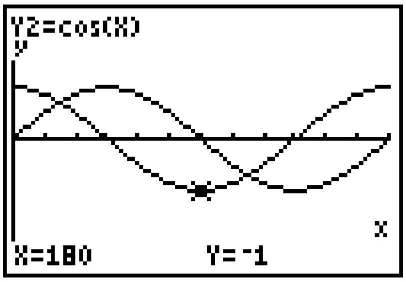
Beim Verfolgen der Kurven mit `TRACE` und Wechseln von einer zur anderen wird die Phasenverschiebung von Sinus und Kosinus um 90° deutlich.

`TRACE` `▲` `▼`...



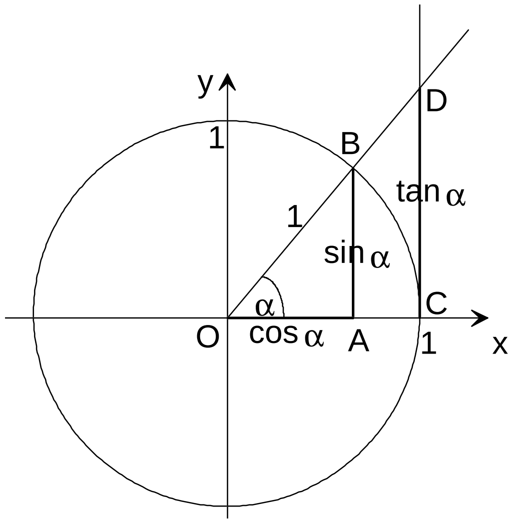
```
Y1=sin(X)
X=180        Y=0
```

Kurve wechseln mit `▶` oder `◀`



```
Y2=cos(X)
X=180        Y=⁻1
```

3.2.3 Tangensfunktion



Das Dreieck ΔOBC im Einheitskreis hat die Hypotenusenlänge 1 und die Kathetenlängen sin α und cos α. Es ist ähnlich dem Dreieck ΔOCD mit den Katheten 1 und tan α. Daraus ergibt sich

$$\frac{\tan\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$ als Definition für tan α.

Arbeitsschritte | Tastenfolge | Display

Diese Definition des Tangens stimmt mit der im TI-83 vorgegebenen überein, wie sich anhand einer Wertetabelle für

$y_3 = \frac{\sin x}{\cos x}$ und

$y_4 = \tan x$ leicht nachprüfen lässt.

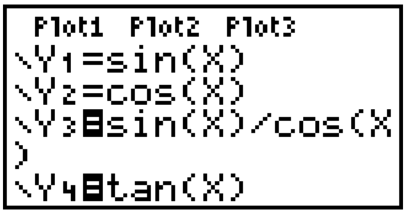
`MODE`

Winkel: `Radian`

Funktion: `Func`

`Y=`

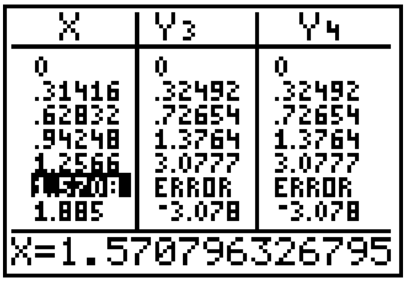
```
Y3=sin(X)/cos(X
)
Y4=tan(X)
```



```
 Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=sin(X)
\Y2=cos(X)
\Y3■sin(X)/cos(X
)
\Y4■tan(X)
```

Es fällt auf, dass für den Wert x =1,570796...≈ $\frac{\pi}{2}$ bei beiden Funktionen ein Fehler angezeigt wird. Für $y_3 = \frac{\sin x}{\cos x}$ ist dies klar, da für $x = \frac{\pi}{2}$ der Nenner cos x = 0 wird. Damit ist auch tan x für diese Stelle nicht definiert und für alle weiteren x mit cos x = 0.

`2nd` `TABLE`



X	Y3	Y4
0	0	0
.31416	.32492	.32492
.62832	.72654	.72654
.94248	1.3764	1.3764
1.2566	3.0777	3.0777
1.5708	ERROR	ERROR
1.885	⁻3.078	⁻3.078

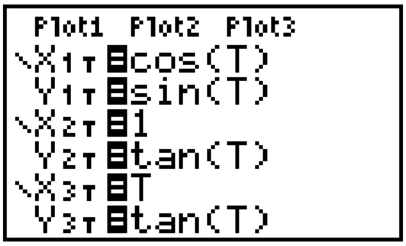
X=1.5707963267 95

`MODE`

Funktion: `Par`

`Y=`

```
X2T=1
Y2T=tan(T)
X3T=T
Y3T=tan(T)
```

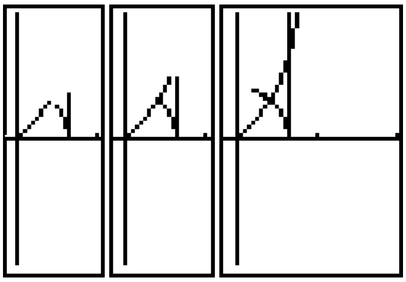


```
 Plot1 Plot2 Plot3
\X1T■cos(T)
 Y1T■sin(T)
\X2T■1
 Y2T■tan(T)
\X3T■T
 Y3T■tan(T)
```

$x_2(x) = 1$

$y_2(x) = \tan\, x$

`GRAPH`



stellt die Länge des Tangens an der Stelle x = 1 dar,

$x_2(x) = x$

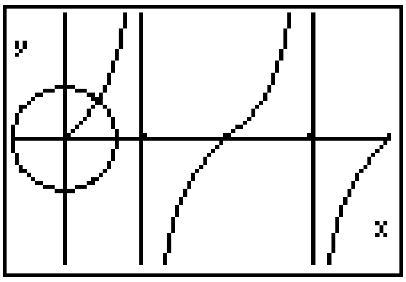
$y_2(x) = \tan\, x$

die Tangensfunktion selbst, aufgetragen gegen x.

So sieht der fertiggezeichnete Graph der Tangensfunktion aus.

Bei $x = \frac{\pi}{2}$ und $x = \frac{3\pi}{2}$ ist $\tan x$ nicht definiert.

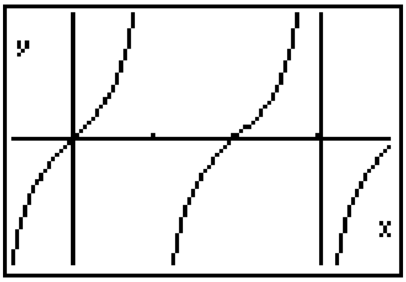
Es erscheint jeweils eine senkrechte Asymptote. Dies ist eine Täuschung. Der TI-83 berechnet die Funktionswerte für alle x-Werte im Fensterbereich. Zwischen zwei um Δx benachbarten Punkten wird dann im Modus `Connected` der Graph interpoliert, d. h. als Gerade durchgezogen.



Im Beispiel liegen kurz vor $x = \frac{\pi}{2}$ ein Punkt sehr weit im positiven y-Bereich, der nächste kurz nach $x = \frac{\pi}{2}$ sehr weit im negativen y-Bereich. Dazwischen wird eine quasi senkrechte Strecke gezogen, die wie die Asymptote erscheint.

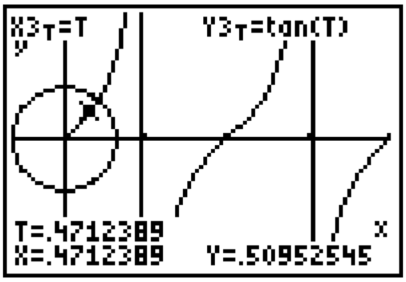
Dies kann man im Modue `Func` verhindern
a) durch den Modus `Dot` oder
b) indem man die Fenstereinstellungen so wählt, dass die Definitionslücke bei $x = \frac{\pi}{2}$ genau auf einen zu berechneten Bildpunkt (Pixel) des Displays fällt.

b)



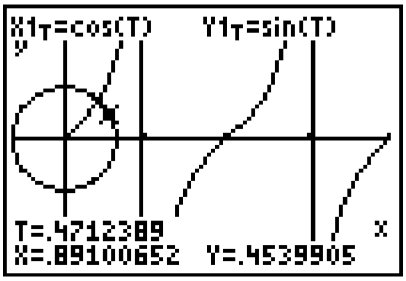
Wechselt man beim Entlangfahren auf der Kurve mit `TRACE` vom Einheitskreis zum Tangens und zurück, so sieht man Sinus- und Kosinuswert (Einheitskreis) bzw. Tangenswert zum jeweils gleichen Winkel `T` bzw.

`TRACE`



X3T=T Y3T=tan(T)
T=.4712389
X=.4712389 Y=.50952545

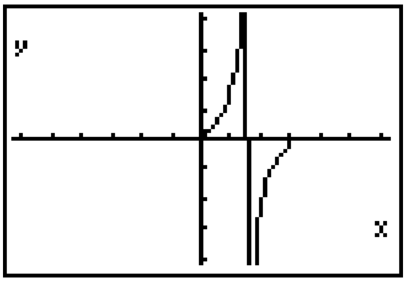
`▲` oder `▼`



X1T=cos(T) Y1T=sin(T)
T=.4712389
X=.89100652 Y=.4539905

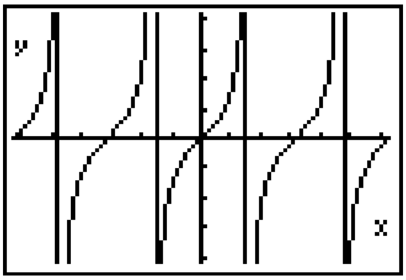
Beim Vergrößern des Ausschnitts des Funktionsgraphen im Modus `Par` wird nur eine Periode des Tangens dargestellt.
Es deutet sich an, dass die Wertemenge von tan α ganz ℝ ist.

`WINDOW`
`Tmin=0`
`Tmax=3.14159265`

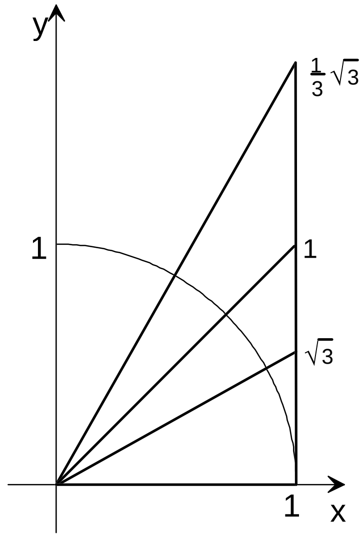


Bei der Darstellung im Modus `Func` ist diese Einschränkung des Definitionsbereichs nicht möglich. Alle Perioden des Tangens im Fensterausschnitt werden angezeigt.

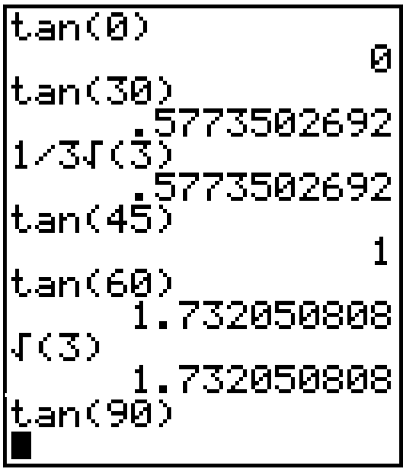
`MODE` `Func`



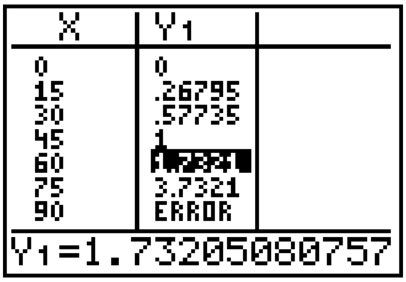
3.2.4 Tan α von besonderen Winkelmaßen



Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display

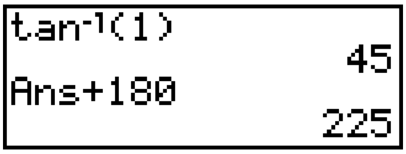
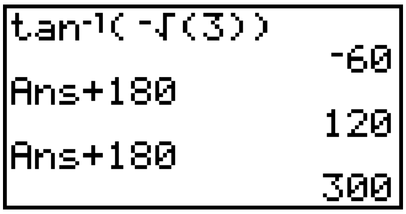
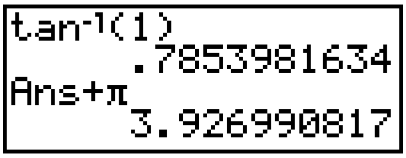
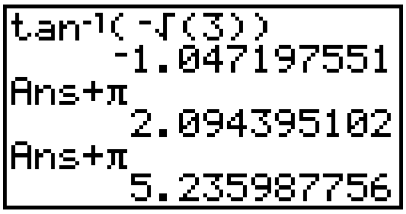
$\tan 0° = 0$
$\tan 30° = \frac{1}{3}\sqrt{3}$
$\tan 45° = 1$
$\tan 60° = \sqrt{3}$
$\tan 90°$ nicht definiert!
	`tan(0)`
	`tan(30)`
	`1/3*√3`
	`tan(45)`
	`tan(60)`
	`√3`
	`tan(90)`
		 tan(0)
		0
		tan(30)
		.5773502692
		1/3√(3)
		.5773502692
		tan(45)
		1
		tan(60)
		1.732050808
		√(3)
		1.732050808
		tan(90)

	ergibt eine Fehlermeldung, da tan 90° nicht definiert ist.	 ERR:DOMAIN 1:Quit 2:Goto

Die gleichen Funktionswerte sind auch in der Wertetabelle mit Schrittweite `ΔTbl=15` abzulesen.	Y=
	`Y1=tan(X)`
	2nd `Tbl`
	`ΔTbl=15`
	Y= `TABLE`
		 X Y1
		0 0
		15 .26795
		30 .57735
		45 1
		60 1.7321
		75 3.7321
		90 ERROR
		Y1=1.7320508757

3.2.5 Bestimmung von Winkelmaßen trigonometrische Gleichungen tan α = *k*

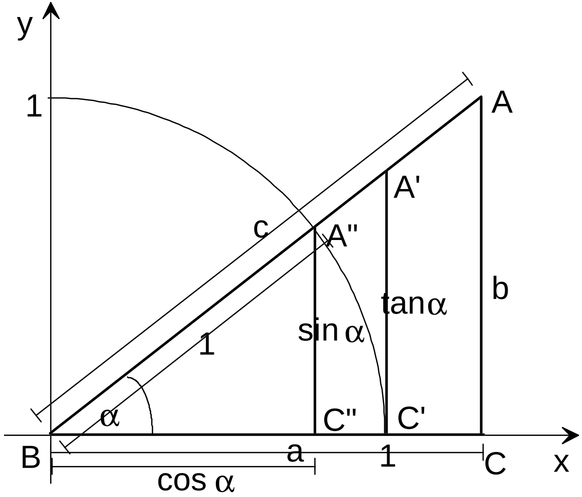
Im Intervall $\alpha \in [0°; 360°[$ nimmt die Funktion tan α jeden Funktionswert zweimal an. Die Gleichung $\tan\alpha = k$; $k \in \mathbb{R}$ hat also in $\alpha \in [0°; 360°[$ immer zwei Lösungen in verschiedenen Quadranten.

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: $\tan\alpha = 1$ gesucht sind die Winkel α mit $\alpha \in [0°; 360°[$, die diese Gleichung erfüllen. Lösung: $\alpha_1 = 45°$; $\alpha_2 = 225°$	Voreinstellung $\boxed{\text{MODE}}$ Degree $\boxed{\text{2nd}}$ $\text{TAN}^{-1}(1)$ +180	 $\tan^{-1}(1)$ 45 Ans+180 225
Beispiel: $\tan\alpha = -\sqrt{3}$ Lösungen im 2. und 4. Quadranten: $\alpha_1 = 120°$; $\alpha_2 = 300°$	$\boxed{\text{2nd}}$ $\text{TAN}^{-1}(\boxed{(-)}\boxed{\text{2nd}}\sqrt{\ }(3))$ +180 +180	 $\tan^{-1}(-\sqrt{}(3))$ -60 Ans+180 120 Ans+180 300
Dieselben Gleichungen für α in Bogenmaß mit $\alpha \in [0; 2\pi[$	Voreinstellung $\boxed{\text{MODE}}$ Radian $\boxed{\text{2nd}}$ $\text{TAN}^{-1}(1)$ +$\boxed{\text{2nd}}$ π	 $\tan^{-1}(1)$ .7853981634 Ans+π 3.926990817
	$\boxed{\text{2nd}}$ $\text{TAN}^{-1}(\boxed{(-)}\boxed{\text{2nd}}\sqrt{\ }(3))$ +$\boxed{\text{2nd}}$ π +$\boxed{\text{2nd}}$ π	 $\tan^{-1}(-\sqrt{}(3))$ -1.047197551 Ans+π 2.094395102 Ans+π 5.235987756

3.3 Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck

3.3.1 Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck

Dreieck Δ*ABC* sei ein beliebiges rechtwinkliges Dreieck. Man legt es so, dass eine Ecke *B* auf *O* und die Kathete *a* auf der *x*-Achse liegt. Die Dreiecke Δ*ABC*, Δ*A'BC'* (mit *C'* auf dem Einheitskreis) und *ΔA"BC"* (mit *A"* auf dem Einheitskreis) sind ähnlich (gleiche Winkel).



Also gilt:

$$\frac{\overline{A''C''}}{\overline{A''B}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{1} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}}.$$

Ferner:

$$\frac{\overline{BC''}}{\overline{A''B}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \frac{\cos\alpha}{1} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow$$

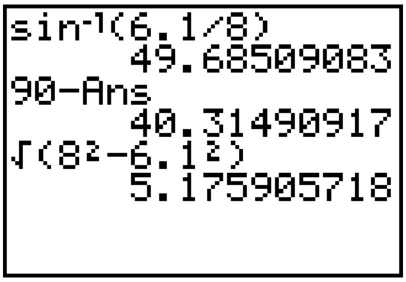
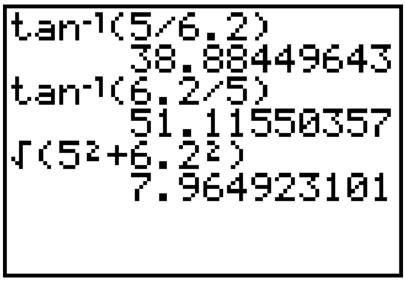
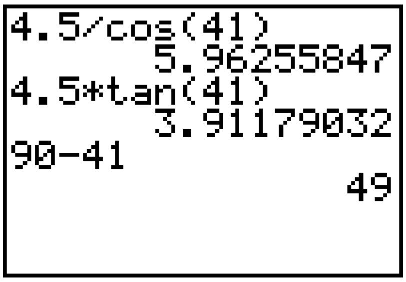
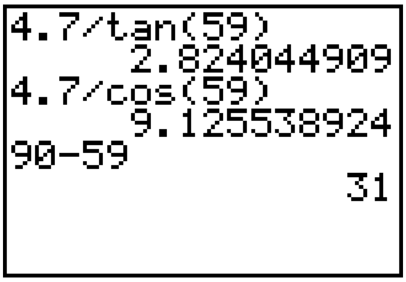
$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}},$$

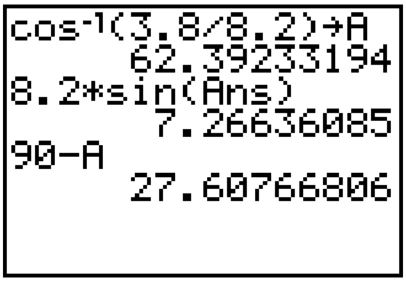
und:

$$\frac{\overline{A'C'}}{\overline{BC'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \frac{\tan\alpha}{1} = \frac{b}{a} \Leftrightarrow$$

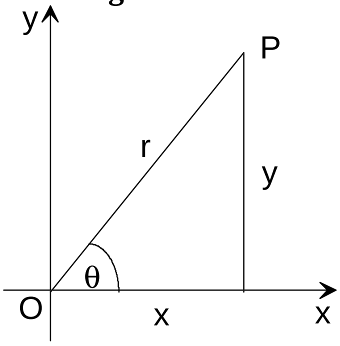
$$\boxed{\tan\alpha = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}}.$$

3.3.2 Berechnungen im rechtwinkligen Dreieck

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: $a = 6,1$ [cm], $c = 8,0$ [cm], $\gamma = 90°$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\beta = 90° - \alpha$ $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ Ergebnis: $\alpha \approx 49,69°$, $\beta \approx 40,31°$, $c \approx 5,18$ [cm]	$\boxed{\text{2nd}}$ sin^{-1}(6.1$\boxed{\div}$8) 90−$\boxed{\text{2nd}}$ANS √(8$\boxed{x^2}$−6.1$\boxed{x^2}$)	 sin^{-1}(6.1/8) 49.68509083 90−Ans 40.31490917 √(8²−6.1²) 5.175905718
Beispiel: $a = 5,0$ [cm], $b = 6,2$ [cm], $\gamma = 90°$ $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ $\tan\beta = \frac{b}{a}$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ Ergebnis: $\alpha \approx 38,88°$, $\beta \approx 51,96°$, $c \approx 7,96$ [cm]	$\boxed{\text{2nd}}$ tan^{-1}(5$\boxed{\div}$6.2) $\boxed{\text{2nd}}$ tan^{-1}(6.2$\boxed{\div}$5) √(5$\boxed{x^2}$+6.2$\boxed{x^2}$)	 tan^{-1}(5/6.2) 38.88449643 tan^{-1}(6.2/5) 51.11550357 √(5²+6.2²) 7.964923101
Beispiel: $a = 4,5$ [cm], $\beta = 41°$, $\gamma = 90°$ $\cos\beta = \frac{a}{c} \Leftrightarrow c = \frac{a}{\cos\beta}$ $\tan\beta = \frac{b}{a} \Leftrightarrow b = a \cdot \tan\beta$ $\alpha = 90° - \beta$ Ergebnis: $c \approx 5,96$ [cm], $b \approx 3,91$ [cm], $\alpha = 49°$	4.5$\boxed{\div}$cos(41) 4.5$\boxed{\times}$tan(41) 90$\boxed{-}$41	 4.5/cos(41) 5.96255847 4.5*tan(41) 3.91179032 90−41 49
Beispiel: $b = 4,7$ [cm], $\alpha = 90°$, $\gamma = 59°$(!) $\tan\gamma = \frac{b}{c} \Leftrightarrow c = \frac{b}{\tan\gamma}$ $\cos\gamma = \frac{b}{a} \Leftrightarrow a = \frac{b}{\cos\gamma}$ $\beta = 90° - \gamma$ Ergebnis: $c \approx 2,82$ [cm], $a \approx 9,13$ [cm], $\beta = 31°$	4.7$\boxed{\div}$tan(59) 4.7$\boxed{\div}$cos(59) 90−59	 4.7/tan(59) 2.824044909 4.7/cos(59) 9.125538924 90−59 31

Beispiel: $b = 3,8$ [cm], $c = 8,2$ [cm], $\gamma = 90°$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c} \Leftrightarrow a = c \cdot \sin\alpha$ $\beta = 90° - \alpha$ Ergebnis: $\alpha \approx 62,39°$, $a \approx 7,27$ [cm], $\beta \approx 27,71°$	[2nd] $\cos^{-1}$(3.8[÷] 8.2)[STO▸][ALPHA]A 8.2[×]sin([2nd]ANS 90-[ALPHA]A	 $\cos^{-1}(3.8/8.2)\rightarrow A$ 62.39233194 8.2*sin(Ans) 7.26636085 90-A 27.60766806

3.3.3 Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten

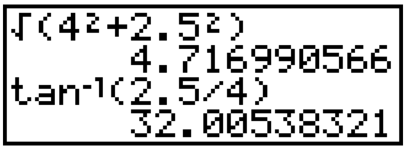
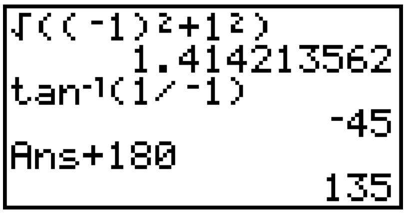


Die kartesischen Koordinaten *x* und *y* des Punkts *P* und die Polarkoordinate *r* bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Nach dem Satz des Pythagoras ergibt sich:

$$r^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Aus der Definition des Tangens:

$$\tan\theta = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \quad \text{folgt:} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: *P*(4|2,5) Ergebnis: *P*(4,72|32°)	[2nd]√(4[x^2]+2.5[x^2]) [2nd] $\tan^{-1}$(2.5[÷]4)	 $\sqrt{}(4^2+2.5^2)$ 4.716990566 $\tan^{-1}(2.5/4)$ 32.00538321
Beispiel: *A*(-1|1) Der TI-83 liefert für die Gleichung tan(α) = -1 die Lösung α = -45°, der Punkt läge also im 4. Quadranten. Der Punkt *A* liegt aber im 2. Quadranten. Folglich müssen 180° addiert werden, da tan α = tan (α + 180°). Ergebnis: *A*(1,41|135°)	[2nd]√([(-)]1[x^2]+1[x^2]) [2nd] $\tan^{-1}$(1[÷][(-)]1) [2nd]ANS+180	 $\sqrt{}((-1)^2+1^2)$ 1.414213562 $\tan^{-1}(1/-1)$ -45 Ans+180 135

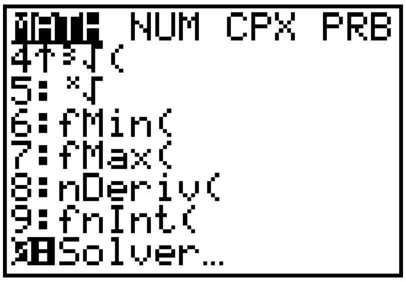
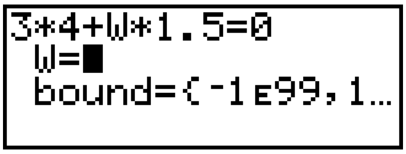
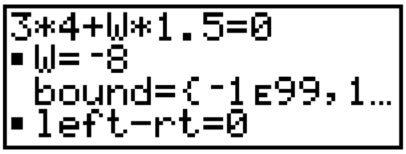
3.3.4 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ ist definiert als

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y.$$

Ergibt das Skalarprodukt = 0, so stehen sie Vektoren senkrecht aufeinander:

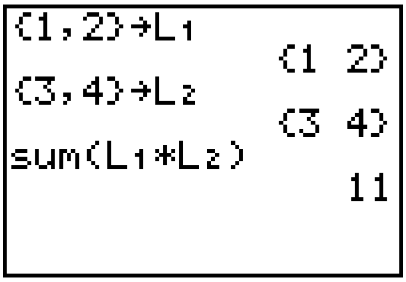
$$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ Ergebnis: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -13$	5*$\boxed{\text{(-)}}$3+2*1	
Beispiel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix}$ Ergebnis: $\begin{pmatrix} -2,5 \\ 2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \end{pmatrix} = 0$	$\boxed{\text{(-)}}$2.5*8+2*10 Die Vektoren bilden einen rechten Winkel.	
Aufgabe: Welche *y*-Koordinate muss der Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ w_y \end{pmatrix}$ haben, damit der senkrecht zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ steht? Gleichung: $3 \cdot 4 + w_y \cdot 1,5 = 0$	Die Gleichung kann mit dem Gleichungslöser SOLVE gelöst werden. $\boxed{\text{MATH}}$ 0:Solver$\boxed{\text{ENTER}}$	 MATH NUM CPX PRB 4↑³√(5:ˣ√ 6:fMin(7:fMax(8:nDeriv(9:fnInt(0:Solver...
Gleichung eingeben	3*4+$\boxed{\text{ALPHA}}$W*1.5=0	 EQUATION SOLVER eqn:0=3*4+W*1.5
Solver-Algorithmus durchführen...	$\boxed{\text{ALPHA}}$SOLVE	 3*4+W*1.5=0 W=█ bound={-1ᴇ99,1...
... ergibt die Lösung $w_y = -8.$	$\boxed{\text{ENTER}}$	 3*4+W*1.5=0 ▪W=-8 bound={-1ᴇ99,1... ▪left-rt=0

Das Skalarprodukt kann auch auf andere Weise mit dem TI-83 berechnet werden.

2nd { 1 , 2 2nd }
STO▶ 2nd L1
2nd { 1 , 2 2nd }
STO▶ 2nd L1

2nd LIST
MATH 5:sum ENTER
sum(L1*L2)

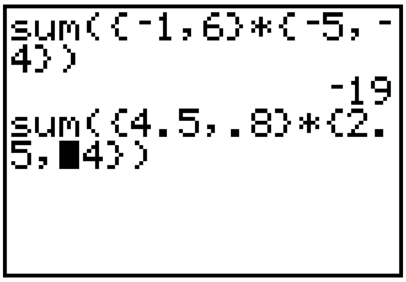


```
{1,2}→L1
                {1 2}
{3,4}→L2
                {3 4}
sum(L1*L2)
                   11
```

Sind mehrere Skalarprodukte nacheinander zu berechnen, so bietet sich z. B. folgendes Vorgehen an:

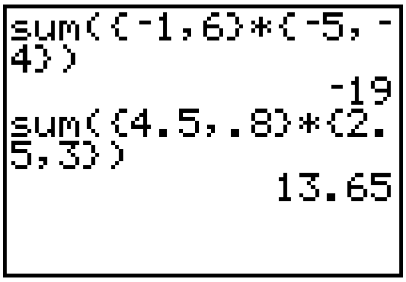
2nd LIST
MATH 5:sum ENTER
sum(2nd { (-) 1 , 6 2nd
} * 2nd { (-) 5 , (-) 4 2nd
})

2nd ENTRY, dann alte Zahlen überschreiben



```
sum({-1,6}*{-5,-
4})
                  -19
sum({4.5,.8}*{2.
5,■4})
```

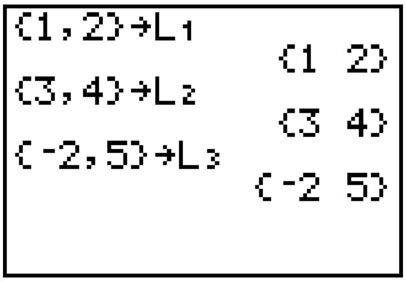
und ENTER



```
sum({-1,6}*{-5,-
4})
                  -19
sum({4.5,.8}*{2.
5,3})
                13.65
```

Das Kommutativ- und das Distributivgesetz der skalaren Muktiplikation von Vektoren lässt sich exemplarisch durch Rechnung bestätigen.

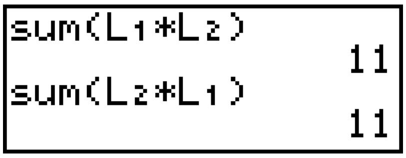
Dazu werden die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$ auf die Listenvariablen L1, L2 und L3 gespeichert.



```
{1,2}→L1
                {1 2}
{3,4}→L2
                {3 4}
{-2,5}→L3
               {-2 5}
```

Kommutativgesetz

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

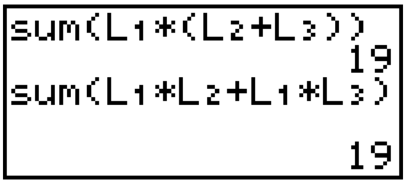


```
sum(L1*L2)
                   11
sum(L2*L1)
                   11
```

Distributivgesetz

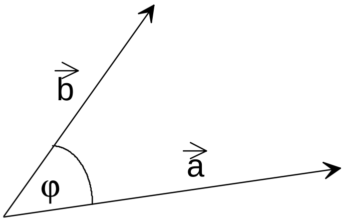
$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\odot\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}\right)=$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}$$

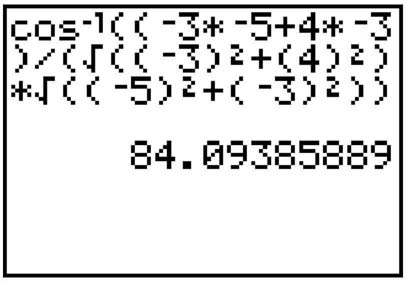
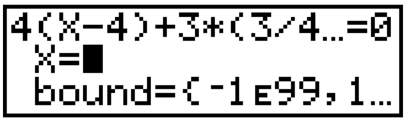
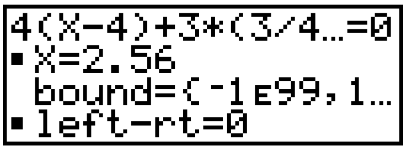
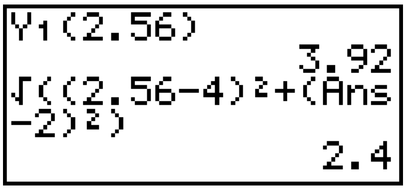


```
sum(L1*(L2+L3))
                   19
sum(L1*L2+L1*L3)
                   19
```

3.3.5 Winkel zwischen Vektoren



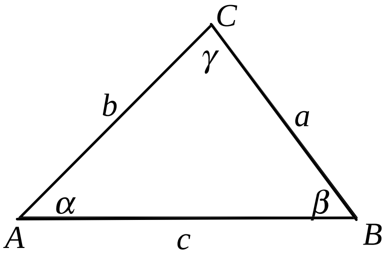
Für das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: $\vec{a} \odot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi$

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: Gegeben: Vektoren $\vec{a} = (7{,}5 \mid 35°)$, und $\vec{b} = (4 \mid 270°)$; Gesucht: $\vec{a} \odot \vec{b}$	$\boxed{\text{MODE}}$ Degree 7.5*4*cos(270-35)	 7.5*4*cos(270-35) ⁻17.20729309
Beispiel: Gegeben: Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ Gesucht: Winkel φ zwischen den Vektoren $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \odot \vec{b}}{a \cdot b}$	$\boxed{\text{2nd}}$ cos⁻¹(($\boxed{\text{(-)}}$3*$\boxed{\text{(-)}}$5+4*$\boxed{\text{(-)}}$3)$\boxed{\div}$($\boxed{\text{2nd}}$√(($\boxed{\text{(-)}}$3)$\boxed{x^2}$+4$\boxed{x^2}$)$\boxed{\times}$$\boxed{\text{2nd}}$√(($\boxed{\text{(-)}}$5)$\boxed{x^2}$+($\boxed{\text{(-)}}$3)$\boxed{x^2}$))	 cos⁻¹((⁻3* ⁻5+4* ⁻3)/(√((⁻3)²+(4)²) *√((⁻5)²+(⁻3)²)) 84.09385889
Beispiel: Abstand $d(P;g)$ des Punktes $P(4\mid 2)$ von der Geraden g: $y = \frac{3}{4}x + 2$ Lösung: Sei $\overrightarrow{QT} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $Q \in g$ und $T \in g$ Gesucht: $P_0 \in g$ mit $\overrightarrow{QT} \perp \overrightarrow{PP_0}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{QT} \odot \overrightarrow{PP_0} = 0$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x-4 \\ \frac{3}{4}x+2-2 \end{pmatrix} = 0$	$\boxed{\text{MATH}}$ 0:Solver$\boxed{\text{ENTER}}$ 4(X-4)+3*(3/4*X)=0 $\boxed{\text{ALPHA}}$SOLVE ergibt x = 2,56	 EQUATION SOLVER eqn:0=4(X-4)+3*(3/4*X)█  4(X-4)+3*(3/4…=0 X=█ bound={⁻1ᴇ99,1…  4(X-4)+3*(3/4…=0 ▪X=2.56 bound={⁻1ᴇ99,1… ▪left-rt=0
Funktionsgleichung der Geraden in $\boxed{\text{Y=}}$-Editor eingeben	$\boxed{\text{Y=}}$ Y1=3/4X+2	 Plot1 Plot2 Plot3 \Y1=3/4X+2
y-Koordinate des Punktes P_0 auf g an der Stelle x = 2,56 ermitteln, Länge des Vektors $\overrightarrow{PP_0}$ berechnen.	$\boxed{\text{2nd}}$QUIT Y1(2.56) $\boxed{\text{2nd}}$ √((2.56-4)$\boxed{x^2}$+$\boxed{\text{2nd}}$ANS-2)$\boxed{x^2}$)	 Y1(2.56) 3.92 √((2.56-4)²+(Ans -2)²) 2.4
Ergebnis: $d(P;g) = 2{,}4$		

3.4 Berechnung von Dreiecken mit dem Sinus- und Kosinussatz

Mit Hilfe des Sinussatzes und des Kosinussatzes können in jedem Dreieck, das durch hinreichend viele Seitenlängen und Innenwinkelmaße definiert ist, alle übrigen Stücke berechnet werden. Zusätzlich lässt sich der Flächeninhalt ermitteln. Die Fallunterscheidung erfolgt wie bei den Kongruenzsätzen (drei Seiten gegeben: „sss” usw.).

3.4.1 Dreieck aus den drei Seiten (sss)



Zur Berechnung des Winkels α wird der Kosinussatz angewandt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Entsprechend für den Winkel β:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

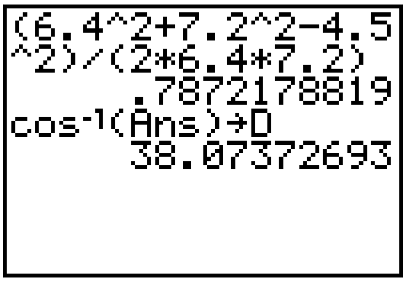
$$\Leftrightarrow \quad \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}.$$

Der Winkel γ ergibt sich nach der Winkelsumme im Dreieck:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

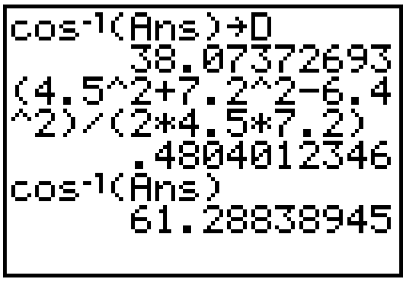
a) Schrittweise manuelle Berechnung

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: a = 4,5 [cm], b = 6,4 [cm], c = 7,2 [cm]		
$\cos\alpha = \frac{6{,}4^2+7{,}2^2-4{,}5^2}{2\cdot 6{,}4\cdot 7{,}2}$	`(6.4^2+7.2^2-4.5^2)/(2*6.4*7.2)` [ENTER] [2nd] `cos⁻¹(` [2nd] `[Ans])` [STO▶] [ALPHA] `D` [ENTER] Das Ergebnis für α wird auf `D` zwischengespeichert	 (6.4^2+7.2^2-4.5 ^2)/(2*6.4*7.2) .7872178819 cos⁻¹(Ans)→D 38.07372693

$$\cos\beta = \frac{4{,}5^2+7{,}2^2-6{,}4^2}{2\cdot4{,}5\cdot7{,}2}$$

`(4.5^2+7.2^2-6.4^2)/(2*4.5*7.2)` $\boxed{\text{ENTER}}$

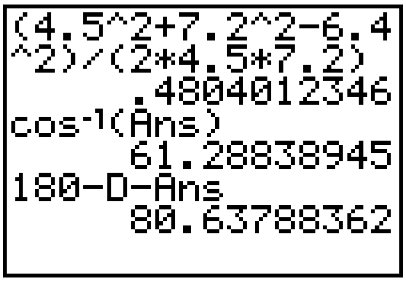
$\boxed{\text{2nd}}$ `cos⁻¹(` $\boxed{\text{2nd}}$ `[Ans])` $\boxed{\text{ENTER}}$



```
cos⁻¹(Ans)→D
      38.07372693
(4.5^2+7.2^2-6.4
^2)/(2*4.5*7.2)
      .4804012346
cos⁻¹(Ans)
      61.28838945
```

$\gamma \approx 180° - 38{,}07372693° -$
$-61{,}28838946°$

`180-`$\boxed{\text{ALPHA}}$`D-`$\boxed{\text{2nd}}$`[Ans]`



```
(4.5^2+7.2^2-6.4
^2)/(2*4.5*7.2)
      .4804012346
cos⁻¹(Ans)
      61.28838945
180-D-Ans
      80.63788362
```

b) Automatische Berechnung in einem Programm

Arbeitsschritte — Tastenfolge — Display

Editieren eines neuen Programms unter dem Namen „SSS“

$\boxed{\text{PRGM}}$
`NEW`,
`1:Create New`

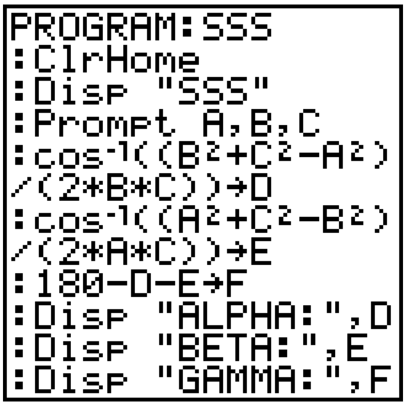
```
EXEC EDIT NEW
1:Create New
```

Programmname eingeben

```
PROGRAM
Name=SSS
```

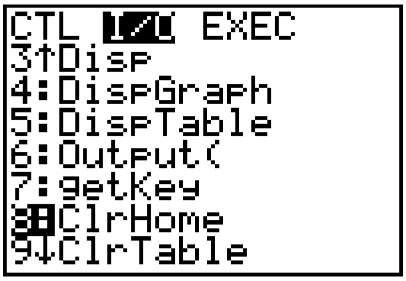
Als Variablennamen stehen im TI-83 leider nur die (Groß-) Buchstaben A bis Z zur Verfügung; für die Winkel α, β und γ wurden daher die Variablen `D`, `E` und `F` gewählt.

```
ClrHome
Disp "SSS"
Prompt A,B,C
cos⁻¹((B²+C²-A²)
/(2*B*C))→D
cos⁻¹((A²+C²-B²)
/(2*A*C))→E
180-D-E→F
Disp "ALPHA:",D
Disp "BETA:",E
Disp "GAMMA:",F
```



```
PROGRAM:SSS
:ClrHome
:Disp "SSS"
:Prompt A,B,C
:cos⁻¹((B²+C²-A²)
/(2*B*C))→D
:cos⁻¹((A²+C²-B²)
/(2*A*C))→E
:180-D-E→F
:Disp "ALPHA:",D
:Disp "BETA:",E
:Disp "GAMMA:",F
```

Beim Editieren des Programms im Programmeditor können die meisten Befehle durch erneutes Drücken der Taste $\boxed{\text{PRGM}}$ aus den Gruppen für Kontrollstrukturen `CTL` und für Ein- und Ausgabe `I/O` ausgewählt und mit $\boxed{\text{ENTER}}$ direkt in den Programmcode kopiert werden.



```
CTL I/O EXEC
3↑Disp
4:DispGraph
5:DispTable
6:Output(
7:getKey
8:ClrHome
9↓ClrTable
```

Starten des Programms und Eingabe der Daten;
dabei muss darauf geachtet werden, dass die Längen der Dreiecksseiten *a*, *b*, *c* die Dreiecksungleichungen erfüllen:
$a < b + c$, $b < a + c$ und $c < a + b$

Das Programm wird dann mit PRGM `EXEC` und Nummer, z. B. `5:SSS` ausgewählt ...

```
EXEC EDIT NEW
3↑ML
4:QUADGL
5:SSS
6:SSWG
7:SSWK
8:SWS
9:WSW
```

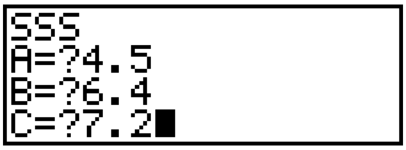
... und mit zweimal Taste ENTER gestartet.

```
prgmSSS█
```

```
SSS
A=?█
```

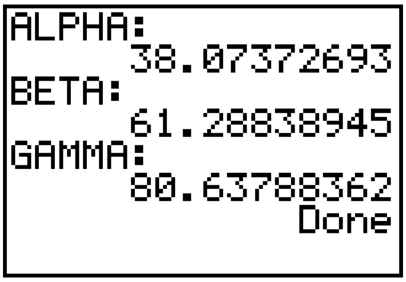
Beispiel:
a = 4,5 [cm], *b* = 6,4 [cm],
c = 7,2 [cm]

Eingabe der Daten jeweils mit ENTER bestätigen.



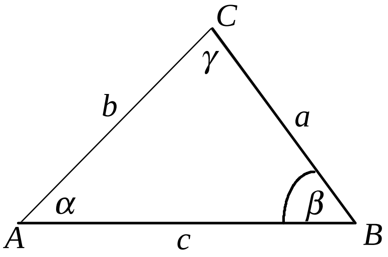
```
SSS
A=?4.5
B=?6.4
C=?7.2█
```

Ergebnis:
$\alpha \approx 38{,}07°$, $\beta \approx 61{,}29°$, $\gamma \approx 80{,}64°$



```
ALPHA:
     38.07372693
BETA:
     61.28838945
GAMMA:
     80.63788362
            Done
```

3.4.2 Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel (sws)



Gegeben seien die Seiten *a* und *c* sowie der von ihnen eingeschlossene Winkel β.

Aus dem Kosinussatz $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$ folgt zur Ermittlung von *b*:

$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta} \cdot$$

Für α ergibt sich aus dem Kosinussatz $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$:

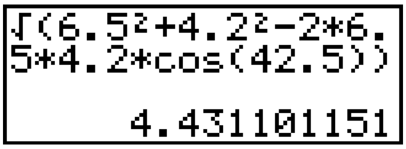
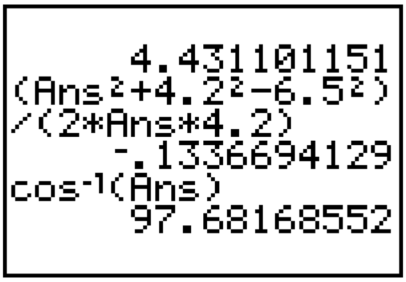
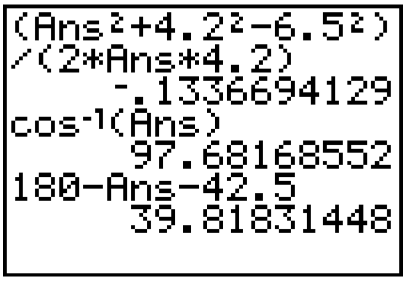
$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

Der Winkel γ ergibt sich nach der Winkelsumme im Dreieck:

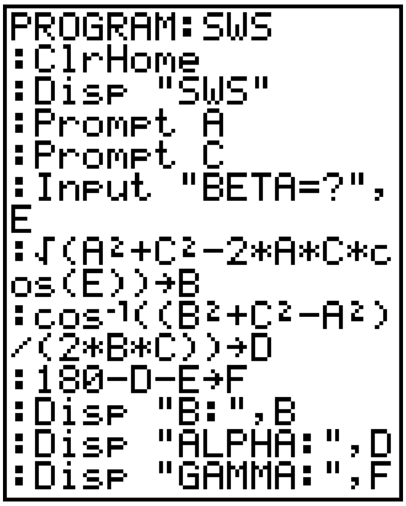
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$
$$\gamma = 180° - \alpha - \beta.$$

Sind statt *a*, *c* und β andere Seiten des Dreiecks und der eingeschlossene Winkel gegeben, so sind die Variablen in den Formeln entsprechend zu vertauschen.

a) Schrittweise manuelle Berechnung

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: $a = 6,5$ [cm], $c = 4,2$ [cm], $\beta = 42,5°$		
$b = \sqrt{6,5^2 + 4,2^2 - 2 \cdot 6,5 \cdot 4,2 \cdot \cos 42,5°}$	$\boxed{\text{2nd}}$√(6.5$\boxed{x^2}$+4.2$\boxed{x^2}$ -2*6.5*4.2 *cos(42.5))	 √(6.5²+4.2²-2*6. 5*4.2*cos(42.5)) 4.431101151
$\cos a = \frac{b^2+4,2^2-6,5^2}{2 \cdot b \cdot 4,2}$	($\boxed{\text{2nd}}$[ANS]$\boxed{x^2}$+4.2 $\boxed{x^2}$-6.5$\boxed{x^2}$)/(2 *$\boxed{\text{2nd}}$[ANS]*4.2) $\boxed{\text{2nd}}$cos^{-1}($\boxed{\text{2nd}}$[ANS]	 4.431101151 (Ans²+4.2²-6.5²) /(2*Ans*4.2) -.1336694129 cos⁻¹(Ans) 97.68168552
$\gamma = 180° - a - \beta$	180-$\boxed{\text{2nd}}$[ANS]-42 .5	 (Ans²+4.2²-6.5²) /(2*Ans*4.2) -.1336694129 cos⁻¹(Ans) 97.68168552 180-Ans-42.5 39.81831448

b) Automatische Berechnung in einem Programm

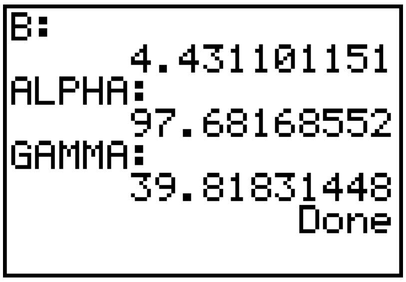
Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Programm „SWS” editieren	$\boxed{\text{PRGM}}$ NEW, 1:Create New SWS $\boxed{\text{ENTER}}$	
	ClrHome Disp "SWS" Prompt A Prompt C Input "BETA=?",E √(A²+C²-2*A*C*c os(E))→B cos⁻¹((B²+C²-A²) /(2*B*C))→D 180-D-E→F Disp "B:",B Disp "ALPHA:",D Disp "GAMMA:",F	 PROGRAM:SWS :ClrHome :Disp "SWS" :Prompt A :Prompt C :Input "BETA=?", E :√(A²+C²-2*A*C*c os(E))→B :cos⁻¹((B²+C²-A²) /(2*B*C))→D :180-D-E→F :Disp "B:",B :Disp "ALPHA:",D :Disp "GAMMA:",F

Beispiel:
a = 6,5 [cm], c = 4,2 [cm],
β = 42,5°

Start mit PRGM `EXEC` und Nummer, z. B. `7:SWS` ausgewählt und mit zweimal Taste ENTER gestartet.

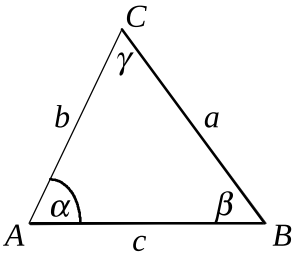
```
SWS
A=?6.5
C=?4.2
BETA=?42.5█
```

Ergebnis:
$b \approx 4,43$ [cm], $\alpha \approx 97,68°$,
$\gamma \approx 39,82°$



```
B:
        4.431101151
ALPHA:
        97.68168552
GAMMA:
        39.81831448
               Done
```

3.4.3 Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der größeren Seite (Ssw)



Es seien die Seiten a und c (a>c) gegeben und der Winkel α.

Nach dem Sinussatz gilt:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha} \text{ bzw. } \sin\gamma = \frac{c\cdot\sin\alpha}{a}.$$

β erhält man nach dem Innenwinkelsatz:

$$\alpha+\beta+\gamma = 180°$$
$$\beta = 180° - \alpha - \gamma.$$

Der Sinussatz: $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$ liefert

$$b = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}\,.$$

a) Schrittweise manuelle Berechnung

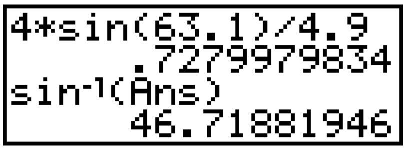
Arbeitsschritte | Tastenfolge | Display

Beispiel:
a = 4,9 [cm], c = 4,0 [cm],
α = 63,1°

$\sin\gamma = \frac{4{,}0\cdot\sin 63{,}1°}{4{,}9}$

`4*sin(63.1)/4.9`

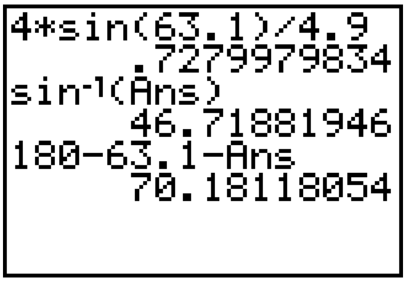
2nd `sin⁻¹(` 2nd `[ANS]`



```
4*sin(63.1)/4.9
        .7279979834
sin⁻¹(Ans)
        46.71881946
```

$\beta = 180° - 63,1° - \gamma$

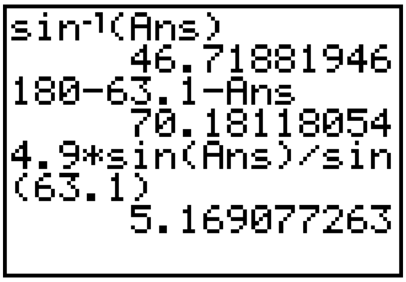
```
180-63.1-[2nd][AN
S]
```



```
4*sin(63.1)/4.9
       .7279979834
sin⁻¹(Ans)
        46.71881946
180-63.1-Ans
        70.18118054
```

$b = \frac{4{,}9 \cdot \sin\beta}{\sin 63{,}1°}$

```
4.9*sin([2nd][ANS
]/sin(63.1)
```



```
sin⁻¹(Ans)
        46.71881946
180-63.1-Ans
        70.18118054
4.9*sin(Ans)/sin
(63.1)
        5.169077263
```

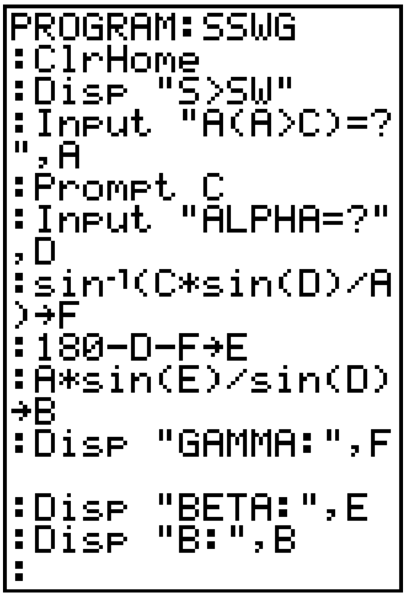
b) Automatische Berechnung in einem Programm

Arbeitsschritte — Tastenfolge — Display

Neues Programm „SWS” editieren

```
[PRGM]
NEW,
1:Create New
SWS [ENTER]
```

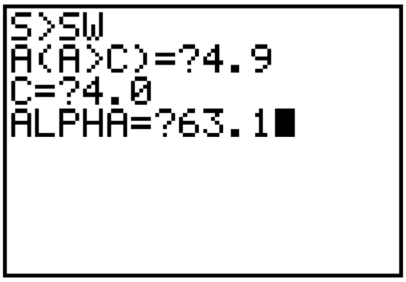
```
ClrHome
Disp "S>SW"
Input
"A(A>C)=?",A
Prompt C
Input
"ALPHA=?",D
sin⁻¹(C*sin(D)/A
)→F
180-D-F→E
A*sin(E)/sin(D)
→B
Disp "GAMMA:",F
Disp "BETA:",E
Disp "B:",B
```



```
PROGRAM:SSWG
:ClrHome
:Disp "S>SW"
:Input "A(A>C)=?
",A
:Prompt C
:Input "ALPHA=?"
,D
:sin⁻¹(C*sin(D)/A
)→F
:180-D-F→E
:A*sin(E)/sin(D)
→B
:Disp "GAMMA:",F

:Disp "BETA:",E
:Disp "B:",B
:
```

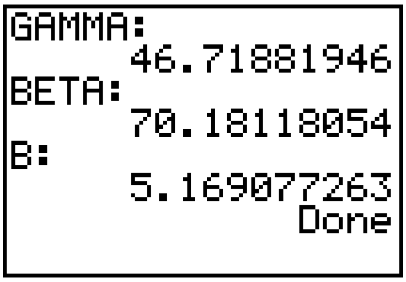
Beispiel:
a = 4,9 [cm], c = 4,0 [cm],
α = 63,1°

Start mit [PRGM] `EXEC` und Nummer, z. B. `6:SSWG` ausgewählt und mit zweimal Taste [ENTER] gestartet. Eingabe der Daten:



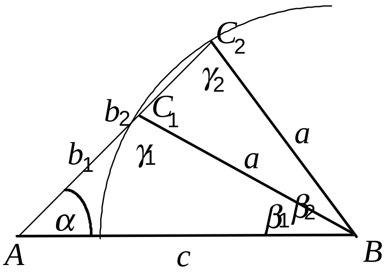
```
S>SW
A(A>C)=?4.9
C=?4.0
ALPHA=?63.1█
```

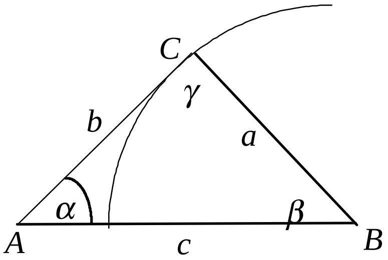
Ergebnis:
$b \approx 5,17$ [cm], $\beta \approx 70,18°$,
$\gamma \approx 46,72°$

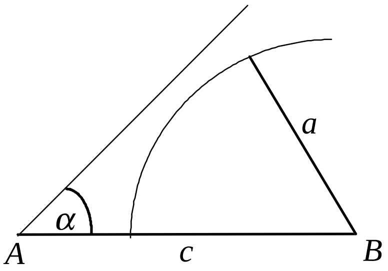


```
GAMMA:
      46.71881946
BETA:
      70.18118054
B:
      5.169077263
             Done
```

3.4.4 Dreieck aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleineren Seite (sSw)







Es seien die Seiten a und c ($a<c$) gegeben und der Winkel α. Wie aus der Zeichnung ersichtlich, ist die Konstruktion nicht eindeutig! Je nach Größe der Seite a im Verhältnis zu c und α kann der Kreis um B mit Radius a den freien Schenkel von α zweimal, genau einmal oder überhaupt nicht schneiden.

Sinussatz für γ:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}, \text{ daraus folgt:}$$

$$\sin\gamma = \frac{c\cdot\sin\alpha}{a}.$$

Wenn $\frac{c\cdot\sin\alpha}{a} < 1$, dann gibt es im Intervall]0°,180°[zwei Winkel γ, deren sin γ diesen Wert hat, die Gleichung hat dann zwei Lösungen.

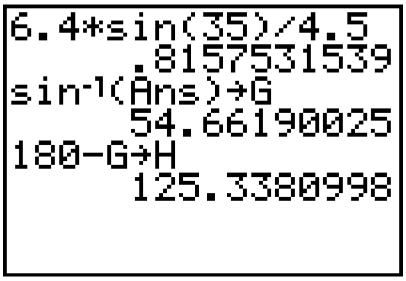
Für $\frac{c\cdot\sin\alpha}{a} = 1$ gibt es genau 1 Lösung, nämlich γ = 90°, für $\frac{c\cdot\sin\alpha}{a} > 1$ gibt es keine Lösung.

Aus der Winkelsumme ergibt sich dann:

$$\beta = 180° - \alpha - \gamma, \text{ und nach dem Sinussatz folgt:}$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \text{ bzw. } b = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha} .$$

a) Schrittweise manuelle Berechnung

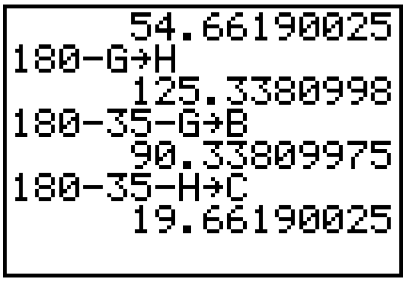
Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: $a = 3,8$ [cm], $c = 6,1$ [cm], $\alpha = 30°$		
$\sin\gamma = \frac{6,4\cdot\sin 35°}{2,5}$ $\gamma_2 = 180° - \gamma_1$	6.4*sin(35)/4.5 $\sin^{-1}$($\boxed{\text{2nd}}$ANS) $\boxed{\text{STO▶}}\boxed{\text{ALPHA}}$G 180-$\boxed{\text{ALPHA}}$G $\boxed{\text{STO▶}}\boxed{\text{ALPHA}}$H ($\gamma_1$ wird auf Variable	 6.4*sin(35)/4.5 .8157531539 $\sin^{-1}$(Ans)→G 54.66190025 180-G→H 125.3380998

G gespeichert,
γ_1 auf **H**)

$\beta_1 = 180° - 35° - \gamma_1$
$\beta_2 = 180° - 35° - \gamma_2$

`180-35-`[ALPHA]`G`
[STO▶][ALPHA]`B`

`180-35-`[ALPHA]`H`
[STO▶][ALPHA]`C`
(β_1 wird auf Variable
B gespeichert,
β_1 auf **C**)



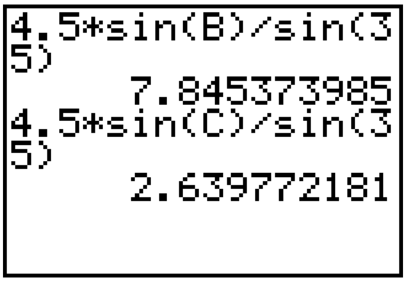
```
     54.66190025
180-G→H
     125.3380998
180-35-G→B
     90.33809975
180-35-H→C
     19.66190025
```

$b_1 = \frac{4{,}5 \cdot \sin\beta_1}{\sin 35°}$

`4.5*sin`[ALPHA]`B/sin(35)`

$b_2 = \frac{4{,}5 \cdot \sin\beta_2}{\sin 35°}$

`4.5*sin`[ALPHA]`C/sin(35)`



```
4.5*sin(B)/sin(3
5)
     7.845373985
4.5*sin(C)/sin(3
5)
     2.639772181
```

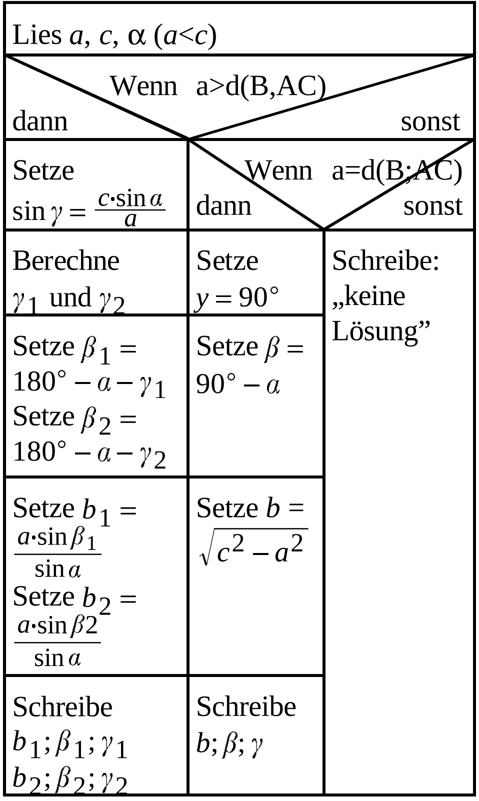
Ergebnis:
$b_1 \approx 7{,}85$ [cm], $\beta_1 \approx 90{,}34°$,
$\gamma_1 \approx 54{,}66°$
$b_2 \approx 2{,}64$ [cm], $\beta_2 \approx 19{,}66°$,
$\gamma_2 \approx 125{,}34°$

b) Automatische Berechnung in einem Programm

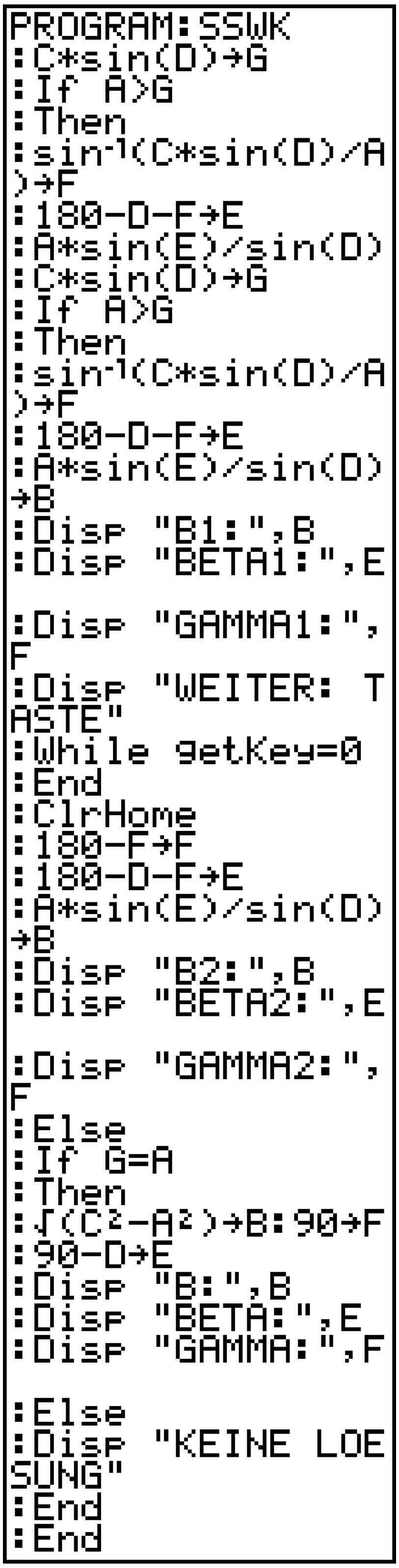
Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Neues Programm „SSWK” editieren	[PRGM] `NEW`, `1:Create New` `SSWK` [ENTER]	

Da hier drei mögliche Typen von Fällen unterschieden werden müssen, ergibt sich ein Programm mit zwei geschachtelten zweiseitigen Auswahlstrukturen „`IF ... THEN ... ELSE ... END`”. Diese Struktur wird auch im Struktogramm sichtbar:

Struktogramm:



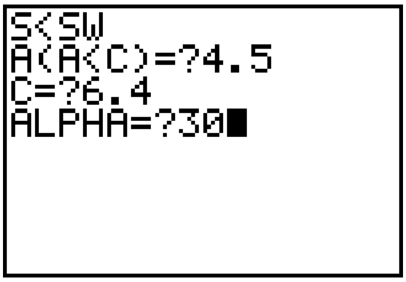
```
ClrHome
Disp "S<SW"
Input
"A(A<C)=?",A
Prompt C
Input
"ALPHA=?",D
C*sin(D)→G
If A>G
Then
sin⁻¹(C*sin(D)/A
)→F
180-D-F→E
A*sin(E)/sin(D)
→B
Disp "B1:",B
Disp "BETA1:",E
Disp
"GAMMA1:",F
Disp "WEITER:
TASTE"
While getKey=0
End
ClrHome
180-F→F
180-D-F→E
A*sin(E)/sin(D)
→B
Disp "B2:",B
Disp "BETA2:",E
Disp
"GAMMA2:",F
Else
If G=A
Then
√(C² -A² )→B:90→F
:90-D→E
Disp "B:",B
Disp "BETA:",E
Disp "GAMMA:",F
Else
Disp "KEINE
LOESUNG"
End
End
```



```
PROGRAM:SSWK
:C*sin(D)→G
:If A>G
:Then
:sin⁻¹(C*sin(D)/A
)→F
:180-D-F→E
:A*sin(E)/sin(D)
:C*sin(D)→G
:If A>G
:Then
:sin⁻¹(C*sin(D)/A
)→F
:180-D-F→E
:A*sin(E)/sin(D)
→B
:Disp "B1:",B
:Disp "BETA1:",E

:Disp "GAMMA1:",
F
:Disp "WEITER: T
ASTE"
:While getKey=0
:End
:ClrHome
:180-F→F
:180-D-F→E
:A*sin(E)/sin(D)
→B
:Disp "B2:",B
:Disp "BETA2:",E

:Disp "GAMMA2:",
F
:Else
:If G=A
:Then
:√(C²-A²)→B:90→F
:90-D→E
:Disp "B:",B
:Disp "BETA:",E
:Disp "GAMMA:",F

:Else
:Disp "KEINE LOE
SUNG"
:End
:End
```

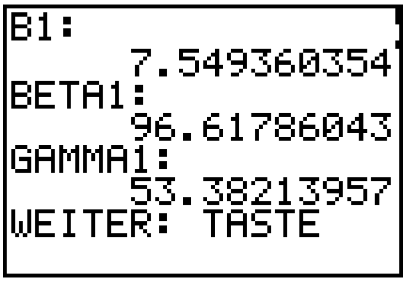
Beispiel:
a = 3,8 [cm], c = 6,1 [cm], α = 30°

Start mit `PRGM` `EXEC` und Nummer; z. B. `7:SSWK` ausgewählt und mit zweimal Taste `ENTER` gestartet.
Eingabe der Daten:



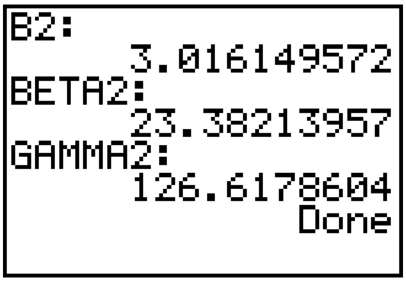
```
S<SW
A(A<C)=?4.5
C=?6.4
ALPHA=?30■
```

Zum Zeichen, dass das Programm noch läuft und auf einen Tastendruck wartet, wandert rechts oben ein kleiner schwarzer Streifen.



```
B1:
       7.549360354
BETA1:
       96.61786043
GAMMA1:
       53.38213957
WEITER: TASTE
```

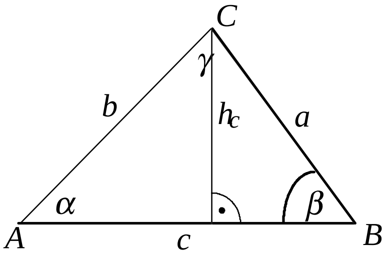
Ergebnis:
$b_1 \approx 7,85$ [cm], $\beta_1 \approx 96,62°$,
$\gamma_1 \approx 53,38°$
$b_2 \approx 3,02$ [cm], $\beta_2 \approx 23,38°$,
$\gamma_2 \approx 126,62°$



```
B2:
       3.016149572
BETA2:
       23.38213957
GAMMA2:
       126.6178604
              Done
```

3.4.5 Flächeninhalt eines Dreiecks

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ergibt sich z. B. bei zwei gegeben Seiten und dem eingeschlossenen Winkel nach der Definition des Sinus:

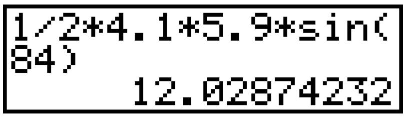


Fläche: $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$

Höhe: $\sin\beta = \frac{h_c}{a} \Leftrightarrow h_c = a \cdot \sin\beta$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2} a\, c \cdot \sin\beta$

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: a = 4,1 [cm]; c = 5,9 [cm]; β = 84° Ergebnis: $A \approx 12,03$ [cm^2]	`1/2*4.1*5.9*sin(84)`	see below



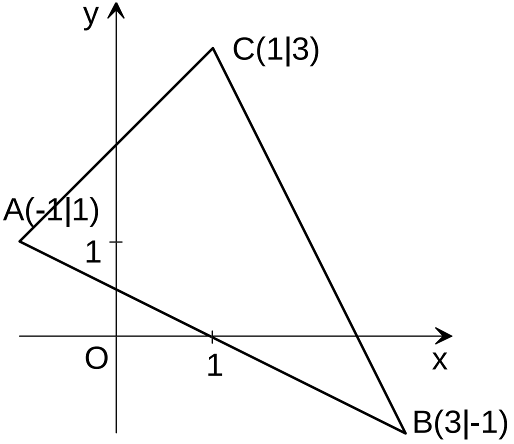
```
1/2*4.1*5.9*sin(
84)
       12.02874232
```

4 Abbildungen im Koordinatensystem

4.1 Figuren Zeichnen am TI-83

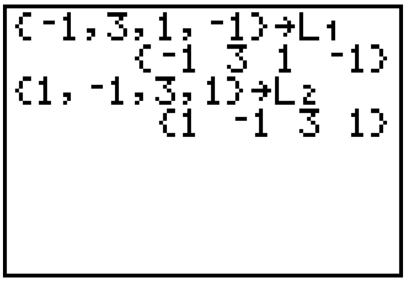
Streckenzüge im Koordinatensystem lassen sich als Liste der Koordinatenpaare ihrer Punkte darstellen. Geradlinig begrenzte Figuren, z. B. Dreiecke, können so als geschlossener Streckenzug aufgefasst werden, bei dem der erste Punkt als letzter wiederholt wird.

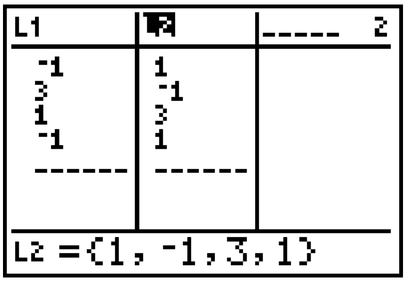
Beispiel: ΔABC mit $A(-1|1)$, $B(3|1)$ und $C(1|3)$

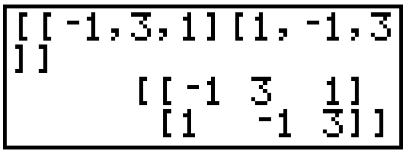


Solche Koordinatenpaare können am TI-83 in zwei verschiedenen Weisen verwendet werden:

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display

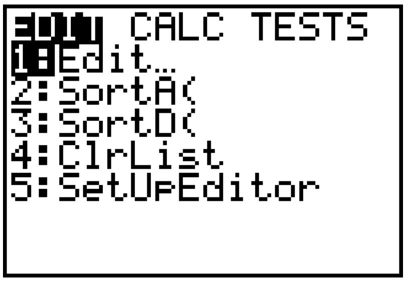
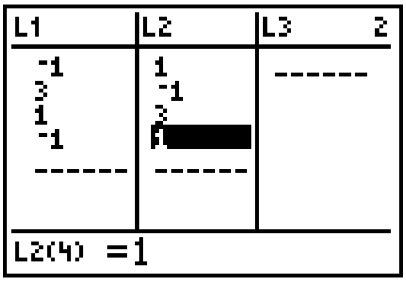
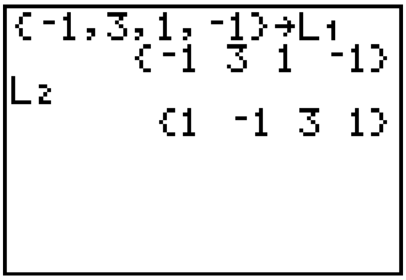
a) als Paar von <u>Listen</u>, die u. a. in einer Kalkulationstabelle bearbeitet und im Koordinatensystem graphisch dargestellt werden kann,	`{-1,3,1,-1}`$\boxed{\text{STO▸}}$
	`L1`
	`{1,-1,3,1}`$\boxed{\text{STO▸}}$
	`L2`
	Die *x*-Koordinaten sind in Liste `L1`, die *y*-Koordinaten in Liste `L2` gespeichert. Die Koordinaten des ersten Punkts sind an letzter Stelle wiederholt.
		
		{-1,3,1,-1}→L1
		{-1 3 1 -1}
		{1,-1,3,1}→L2
		{1 -1 3 1}

Die Listenelemente können auf die Variablen gespeichert oder in der Tabelle editiert werden; sie stehen dann automatisch auch in der jeweils anderen Form zur Verfügung.	oder $\boxed{\text{STAT}}$ `EDIT` `1:Edit…` In der $\boxed{\text{STAT}}$-Tabelle stehen die Listen `L1` der *x*-Koordinaten und `L2` der *y*-Koordinaten in den senkrechten Spalten nebeneinander.	 L1 | L2 | ----- 2 -1 | 1 3 | -1 1 | 3 -1 | 1 ------ | ------ L2 ={1,-1,3,1}

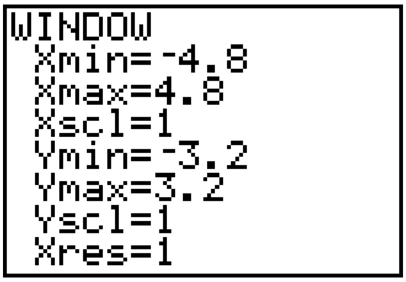
b) als Vektoren bzw. als Spalten in zweireihigen Matrizen, mit denen Matrizenoperationen möglich sind.	`[[-1,3,1][1,-1,3]]`	 [[-1,3,1][1,-1,3]] [[-1 3 1] [1 -1 3]]

Je nach Darstellung - als Listen oder als Matrizen - stehen am TI-83 unterschiedliche Werkzeuge zur Manipulation dieser Objekte zur Verfügung. Die Objekte können auch jeweils von der einen in die andere Form transformiert werden.

4.1.1 Dreieck eingeben und zeichnen

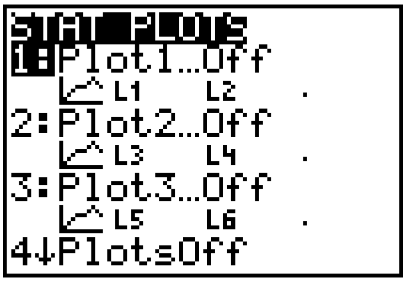
Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
In der Kalkulationstabelle des Statistik-Moduls stehen maximal sechs Spalten zur Verfügung, die den Listenvariablen L1 bis L6 entsprechen. Die Koordinaten des Dreiecks werden in dieser Tabelle eingegeben.	[STAT] EDIT 1:Edit... [ENTER]	 EDIT CALC TESTS 1:Edit... 2:SortA(3:SortD(4:ClrList 5:SetUpEditor
Dabei werden die Koordinaten des ersten Punkts an letzter Stelle wiederholt.	*x*- und *y*-Koordinaten in Spalte L1 und L2 eingeben	 L1 L2 L3 2 -1 1 ------ 3 -1 1 3 -1 ------ ------ L2(4) =1
Diese Daten stehen nun auch als Variable L1 und L2 zur Verfügung, bzw. könnten auch direkt auf L1 und L2 eingegeben werden.	[2nd] QUIT [2nd] { [(-)] 1 , 3 , 1 , [(-)] 1 [2nd] } [STO▶] [2nd] L1 [2nd] L2	 {-1,3,1,-1}→L1 {-1 3 1 -1} L2 {1 -1 3 1}

Die Spalten L1 und L2 der Tabelle können nun als (verbundene) Punkte im Koordinatensystem graphisch dargestellt werden.

Dazu muss der Zeichenbereich ...	[WINDOW] Xmin=-4.8 Xmax=4.8 Xscl=1 Ymin=-3.2 Ymax=3.2 Yscl=1 Xres=1	 WINDOW Xmin=-4.8 Xmax=4.8 Xscl=1 Ymin=-3.2 Ymax=3.2 Yscl=1 Xres=1

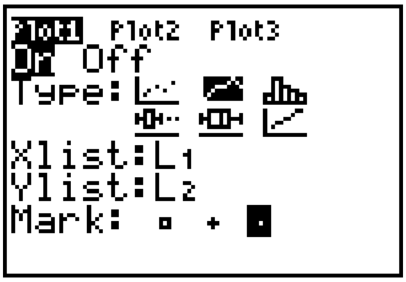
... und die Zeichenformatierung festgelegt werden.

[2nd] STAT PLOT 1:Plot1... [ENTER] führt zu einem Unterfenster für die Zeichnung Plot1


STAT PLOTS
1:Plot1...Off
L1 L2 .
2:Plot2...Off
L3 L4 .
3:Plot3...Off
L5 L6 .
4↓PlotsOff

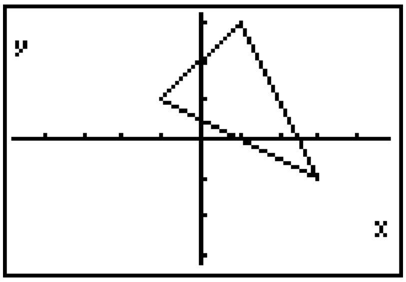
Mit [ENTER] die entsprechenden Optionen markieren:

Typ:	durchgezogen
XList:	L1
YList:	L2
Zeichen:	Punkt


Plot1 Plot2 Plot3
On Off
Type:
Xlist:L1
Ylist:L2
Mark: ▫ + ▪

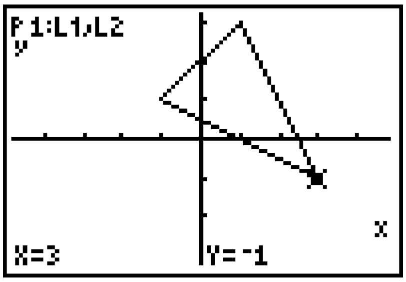
Dreieck zeichnen

Im [Y=]-Editor alle anderen Graphen deaktivieren, dann [GRAPH]



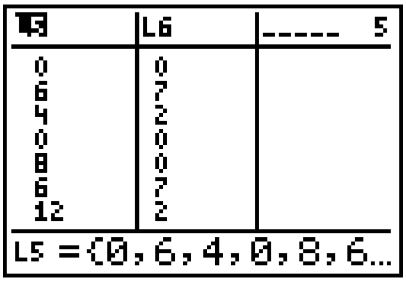
Eckpunkte abfahren und ihre Koordinaten anzeigen

[TRACE] [▸] und [◂]


P1:L1,L2
X=3 Y=⁻1

Auch Projektionen dreidimensionaler Körper können gezeichnet werden. Dazu müssen die räumlichen Koordinaten der Eckpunkte entsprechend einer geometrischen Projektion in ebene Koordinaten transformiert werden. Dann ist ein durchgehender Streckenzug zu finden und dessen Punkte als Listen einzugeben.

[STAT] EDIT 1:Edit... [ENTER] Koordinaten der Eckpunkte in Liste L5 und L6 eingeben.

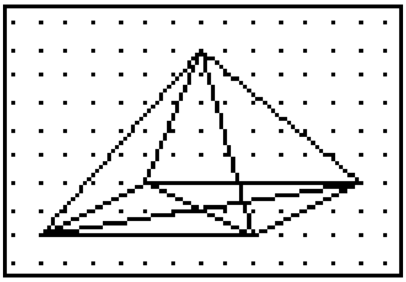


L5	L6	----- 5
0	0	
6	7	
4	2	
0	0	
8	0	
6	7	
12	2	

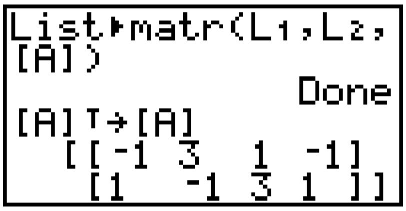
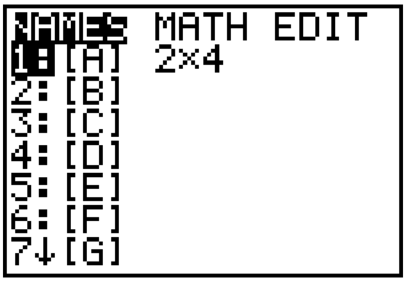
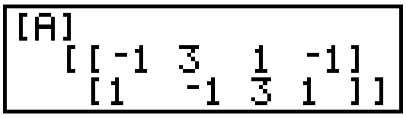
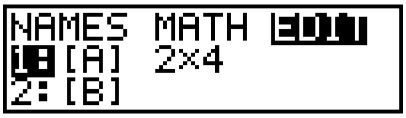
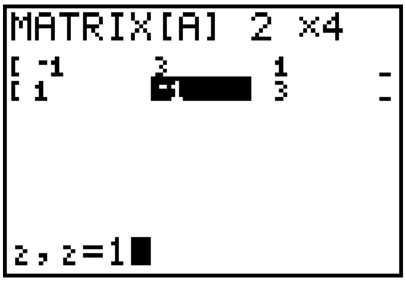
L5 ={0,6,4,0,8,6...

Beispiel:
Schrägbild einer quadratischen Pyramide,
geschlossener Streckenzug aus 11 Punkten.

Fensterdaten geeignet wählen und dann [GRAPH]



4.1.2 Transformation von Listen in Matrizen und umgekehrt

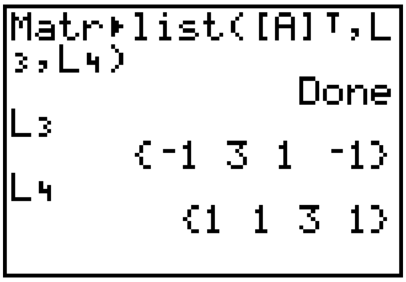
Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
a) Eine direkte Umwandlung von Listen in eine Matrix ist mit einem Befehl möglich. Die Matrix hat dann die Spaltenzahl der Anzahl der Listen und die Zeilenzahl der Länge der Listen.	$\boxed{\text{MATRX}}$ MATH $\boxed{\text{ENTER}}$ 9:List▸matr(	 NAMES MATH EDIT 3↑dim(4:Fill(5:identity(6:randM(7:augment(8:Matr▸list(9:List▸matr(
Die Listen L1 und L2 werden als Spalten der Matrix [A] gespeichert. Damit aus den Listen die Zeilen der Matrix werden, muss [A] mit ᵀ transponiert, d. h. Zeilen und Spalten vertauscht werden.	List▸matr($\boxed{\text{2nd}}$L1 ,$\boxed{\text{2nd}}$L2,$\boxed{\text{MATRX}}$ 1:[A]$\boxed{\text{ENTER}}$) $\boxed{\text{MATRX}}$NAMES 1:[A] $\boxed{\text{ENTER}}$ $\boxed{\text{MATRX}}$MATH 2:ᵀ$\boxed{\text{ENTER}}$$\boxed{\text{STO▸}}$ $\boxed{\text{MATRX}}$NAMES 1:[A]	 List▸matr(L1,L2, [A]) Done [A]ᵀ→[A] [[⁻1 3 1 ⁻1] [1 ⁻1 3 1]]
	zum Test: $\boxed{\text{MATRX}}$ NAMES 1:[A]$\boxed{\text{ENTER}}$	 NAMES MATH EDIT 1:[A] 2×4 2:[B] 3:[C] 4:[D] 5:[E] 6:[F] 7↓[G]
	erneut $\boxed{\text{ENTER}}$ ergibt:	 [A] [[⁻1 3 1 ⁻1] [1 ⁻1 3 1]]
	Mit $\boxed{\text{MATRX}}$ EDIT 1:[A] $\boxed{\text{ENTER}}$ können nun einzelne Elemente der Matrix [A] editiert werden,	 NAMES MATH EDIT 1:[A] 2×4 2:[B]
	z. B. $y_B = 1$ gesetzt.	 MATRIX[A] 2 ×4 [⁻1 3 1 [1 3 2,2=1

Umkehrung: Die Spalten der Matrix `[A]` werden als Listen `L3` und `L4` gespeichert.

`MATRX` `MATH` `ENTER` `8:Matr▶list(`

```
NAMES MATH EDIT
2↑ᵀ
3:dim(
4:Fill(
5:identity(
6:randM(
7:augment(
8:Matr▶list(
```

`Matr▶list(` `MATRX` `NAMES 1:[A]` `ENTER` `MATRX` `MATH` `2:ᵀ` `ENTER` , `2nd` `L3` , `2nd` `L4)` und zur Kontrolle `2nd` `L3` und `2nd` `L4`

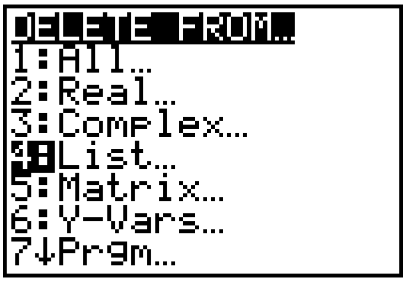


```
Matr▶list([A]ᵀ,L
3,L4)
           Done
L3
     {-1 3 1 -1}
L4
       {1 1 3 1}
```

Mit `2nd` `MEM` `2:Delete...` `ENTER`

```
MEMORY
1:Check RAM...
2:Delete...
3:Clear Entries
4:ClrAllLists
5:Reset...
```

`4:List...` `ENTER`



```
DELETE FROM...
1:All...
2:Real...
3:Complex...
4:List...
5:Matrix...
6:Y-Vars...
7↓Prgm...
```

Mit Cursor ▼ ▲ zu löschende Liste auswählen, mit `ENTER` löschen; entsprechend mit nicht benötigten Matrizen verfahren.

```
DELETE:List
 L1          45
 L2          45
▶L3          45
 L4          45
```

```
DELETE:Matrix
▶[A]         80
```

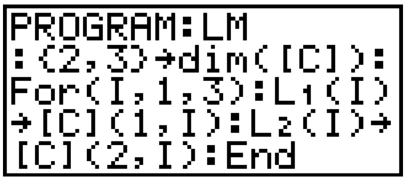
Zur Umwandlung zweier Listen in eine Matrix (LM) bzw. einer Matrix in zwei Listen (ML) eignen sich auch kleine Programme:

`PRGM` `NEW` bzw. `EDIT`

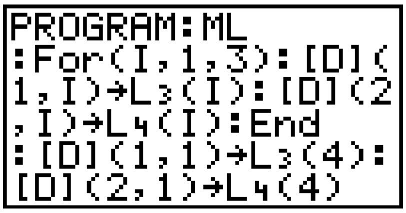
```
EXEC EDIT NEW
1:LM
2:ML
```

Bei den Programmen LM und ML haben die Listen je 4 Elemente (1. Element wird als 4. wiederholt, damit sich ein geschlossener Streckenzug ergibt), die Matrix ist aber nur eine 2x3-Matrix.

Die Programme können leicht editiert werden mit den in den Menüs `PRGM` `CTL` und `PRGM` `I/O` enthaltenen Befehlen.

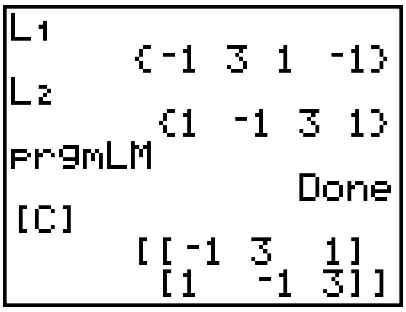


```
PROGRAM:LM
:{2,3}→dim([C]):
For(I,1,3):L1(I)
→[C](1,I):L2(I)→
[C](2,I):End
```



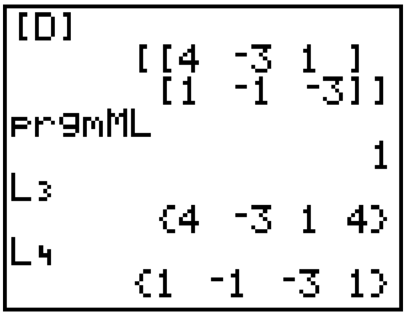
```
PROGRAM:ML
:For(I,1,3):[D](
1,I)→L3(I):[D](2
,I)→L4(I):End
:[D](1,1)→L3(4):
[D](2,1)→L4(4)
```

Aufruf des Programms LM mit PRGM EXEC 1:LM



```
L1
      {⁻1 3 1 ⁻1}
L2
       {1 ⁻1 3 1}
prgmLM
             Done
[C]
      [[⁻1 3  1]
       [1  ⁻1 3]]
```

Aufruf des Programms ML mit PRGM EXEC 2:ML



```
[D]
      [[4  ⁻3 1  ]
       [1  ⁻1 ⁻3]]
prgmML
                1
L3
       {4 ⁻3 1 4}
L4
      {1 ⁻1 ⁻3 1}
```

4.2 Parallelverschiebung

Ein Dreieck ΔABC wird durch Parallelverschiebung um den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ abgebildet auf das Dreieck ΔABC:

$$\Delta ABC \quad \overset{\vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}}{\mapsto} \quad \Delta A'B'C'$$

Jeder Punkt wird abgebildet, indem zu seinen Koordinaten die entsprechenden Komponenten des Verschiebungsvektors addiert werden.

$$A(x_A \mid y_A) \quad \overset{\vec{v}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}}{\mapsto} \quad A'(x_{A'} \mid y_{A'}) \text{ mit}$$

$x_{A'} = x_A + v_x$ und

$y_{A'} = y_A + v_y$.

Arbeitsschritte Tastenfolge Display

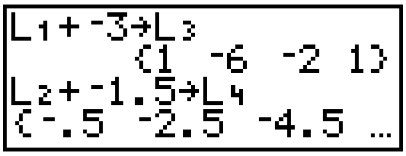
Beispiel:

ΔABC mit $A(-1|1)$, $B(3|-1)$, $C(1|3)$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1,5 \end{pmatrix}$

Am TI-83 können die Komponenten des Verschiebungsvektors zur ganzen Liste der x- bzw. y-Koordinaten der Punkte addiert werden.

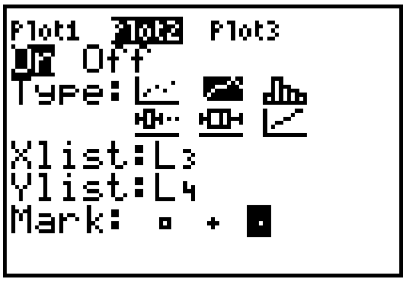
$\boxed{\text{2nd}}$ L1 + $\boxed{\text{(-)}}$ 3 $\boxed{\text{STO▶}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ L3

$\boxed{\text{2nd}}$ L2 + $\boxed{\text{(-)}}$ 1 . 5 $\boxed{\text{STO▶}}$ $\boxed{\text{2nd}}$ L4



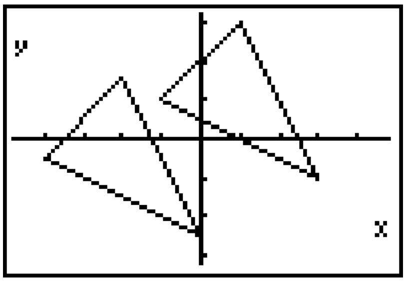
```
L1+-3→L3
      {1 -6 -2 1}
L2+-1.5→L4
{-.5 -2.5 -4.5 ...
```

Mit $\boxed{\text{2nd}}$ STAT PLOT Zeichnung des Bilddreiecks vereinbaren



```
Plot1 Plot2 Plot3
On Off
Type:
Xlist:L3
Ylist:L4
Mark: ▫ + ▪
```

$\boxed{\text{GRAPH}}$



4.3 Zentrische Streckung

4.3.1 Streckungszentrum im Ursprung

Ein Dreieck ΔABC wird durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum $Z(0|0)$ abgebildet auf das Dreieck ΔABC.

$$\Delta ABC \overset{Z(0\,|\,0);\,k}{\mapsto} \Delta A'B'C' \text{ mit } k \neq 0$$

Jeder Punkt wird abgebildet, indem man seine Koordinaten mit den entsprechenden Komponenten des Verschiebungsvektors multipliziert.

$$A(x_A \mid y_A) \overset{Z(0\,|\,0);\,k}{\mapsto} A'(x_{A'} \mid y_{A'}) \text{ mit}$$
$$x_{A'} = k \cdot x_A \text{ und}$$
$$y_{A'} = k \cdot y_A.$$

Arbeitsschritte | Tastenfolge | Display

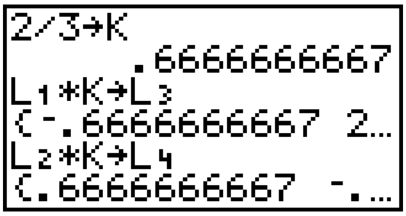
Beispiel:
ΔABC mit $A(-1|1)$, $B(3|-1)$, $C(1|3)$, $k = 0{,}8$

Hier werden die Koordinatenlisten der Punkte mit dem Streckungsfaktor *k* multipliziert.

2 / 3 STO▸ ALPHA K

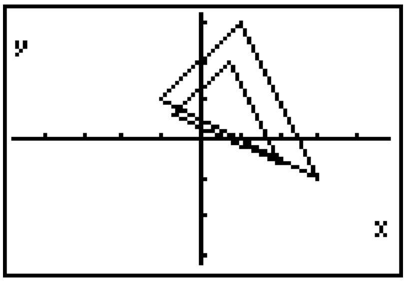
2nd L 1
* ALPHA K STO▸ 2nd L 3

2nd L 2
* ALPHA K STO▸ 2nd L 4



```
2/3→K
          .6666666667
L1*K→L3
{-.6666666667 2...
L2*K→L4
{.6666666667 -....
```

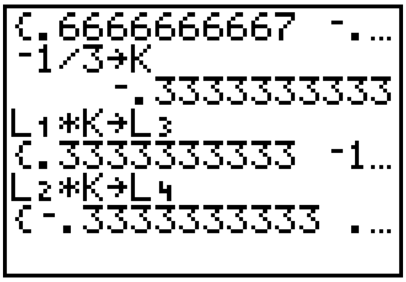
GRAPH



Durch systematisches Variieren von *k* ($k>1$, $k=1$, $0<k<1$, $-1<k<0$, $k=-1$, $k<-1$) wird die Zentrische Streckung empirisch untersucht. Die Variation von *k* ist mit dem TI-83 sehr einfach durchzuführen.

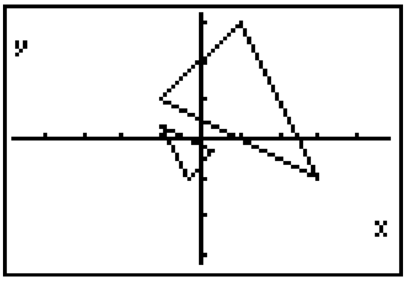
(-) 1 / 3 STO▸ ALPHA K

Die folgenden Zeilen werden mit je dreimal 2nd ENTRY aus dem Speicher geholt und mit ENTER neu ausgewertet.



```
{.6666666667 -....
-1/3→K
         -.3333333333
L1*K→L3
{.3333333333 -1...
L2*K→L4
{-.3333333333 ....
```

GRAPH



4.3.2 Streckungszentrum in beliebigem Punkt

Ein Dreieck ΔABC wird durch zentrische Streckung mit dem Streckungszentrum $Z(x_Z \mid y_Z)$ abgebildet auf das Dreieck $\Delta A'B'C'$.

$$\Delta ABC \overset{Z(x_Z|y_Z);\,k}{\mapsto} \Delta A'B'C' \text{ mit } k \neq 0$$

Für jeden einzelnen Punkt gilt:

$$A(x_A \mid y_A) \overset{Z(0|0);\,k}{\mapsto} A'(x_{A'} \mid y_{A'}).$$

Aus der Vektordarstellung der Abbildungsgleichung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} (1-k)\,x_Z \\ (1-k)\,y_Z \end{pmatrix}$$ folgen die Gleichungen für die Bildkoordinaten:

$$x' = k \cdot x + (1-k) \cdot x_Z \text{ und}$$
$$y' = k \cdot y + (1-k) \cdot y_Z.$$

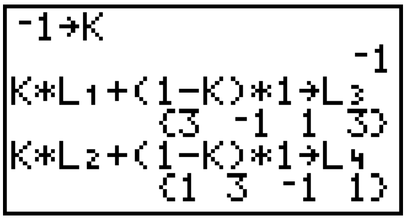
Arbeitsschritte Tastenfolge Display

Beispiel:

ΔABC mit $A(-1|1)$, $B(3|-1)$, $C(1|3)$, $k=-1$, $Z(1|1)$

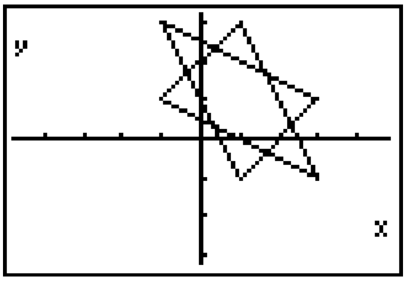
Obige Abbildungsgleichungen werden am TI-83 auf die Listen `L1` und `L2` angewandt, in denen die x- bzw. die y-Koordinaten der Punkte stehen.

`-1 STO▸ ALPHA K`
`ALPHA K * 2nd L1 + ( 1 - K ) * 1 STO▸ 2nd L3`
`ALPHA K * 2nd L2 + ( 1 - K ) * 1 STO▸ 2nd L4`



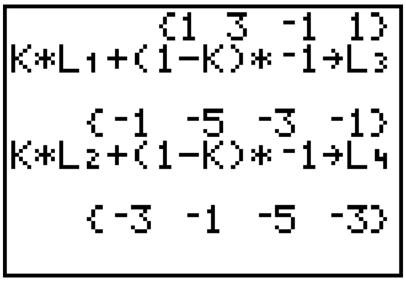
```
-1→K
                -1
K*L1+(1-K)*1→L3
        {3 -1 1 3}
K*L2+(1-K)*1→L4
        {1 3 -1 1}
```

`GRAPH`



Neues Streckungszentrum bei $Z(-1|-1)$.

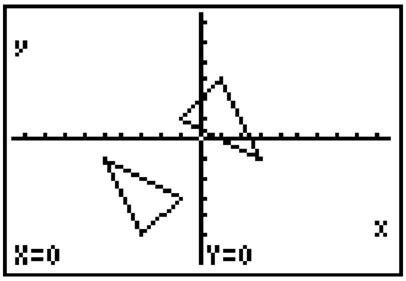
Je dreimal `2nd` `ENTRY`



```
        {1 3 -1 1}
K*L1+(1-K)*-1→L3
     {-1 -5 -3 -1}
K*L2+(1-K)*-1→L4
     {-3 -1 -5 -3}
```

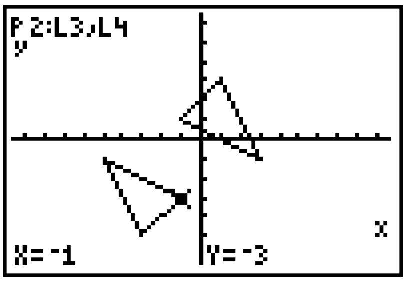
Da die Bildfigur hier teilweise außerhalb des Bildfensters liegt, muss mit `ZOOM` der Bildausschnitt vergrößert werden.

`GRAPH`
`ZOOM` `3:Zoom Out`
mit den zoom-Faktoren `XFact=2` und `YFact=2`



Das Hin- und Herspringen zwischen Ur- und Bildpunkten mit TRACE zeigt die jeweiligen Punktkoordinaten an.

TRACE



4.4 Drehung

4.4.1 Multiplikation von Matrizen

Zwei Matrizen können multipliziert werden, wenn die Spaltenzahl der ersten und die Zeilenzahl der zweiten übereinstimmen. Das Ergebnis ist eine Matrix mit der Zeilenzahl der ersten und der Spaltenzahl der zweiten.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boldsymbol{a}_{21} & \boldsymbol{a}_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \boldsymbol{b}_{13} \\ b_{21} & b_{22} & \boldsymbol{b}_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12}+a_{12}\cdot b_{22} & a_{11}\cdot b_{13}+a_{12}\cdot b_{23} \\ a_{21}\cdot b_{11}+a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12}+a_{22}\cdot b_{22} & \boldsymbol{a}_{21}\cdot \boldsymbol{b}_{13}+\boldsymbol{a}_{32}\cdot \boldsymbol{b}_{23} \\ a_{31}\cdot b_{11}+a_{32}\cdot b_{21} & a_{31}\cdot b_{12}+a_{32}\cdot b_{22} & a_{31}\cdot b_{13}+a_{32}\cdot b_{23} \end{pmatrix}$$

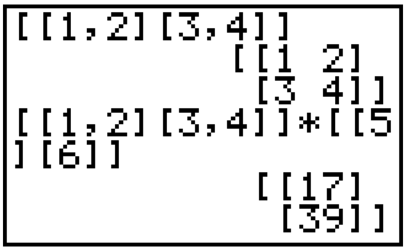
Ergebniselement Zeile 2 Spalte 3 ist die Summe der Produkte entsprechender Elemente aus Zeile 2 der 1. Matrix und Spalte 3 der 2.

Ist z. B. die zweite Matrix nur einspaltig, also ein Vektor, so vereinfacht sich die Multiplikation:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_1 + a_{12}\cdot b_2 \\ a_{21}\cdot b_1 + a_{22}\cdot b_2 \end{pmatrix}$$

$$A \odot \vec{b} = \vec{b}',$$

d. h. Matrix A multipliziert mit Vektor $\vec{b}$ ergibt wieder einen Vektor $\vec{b}$.

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}; \vec{v}=\begin{pmatrix}5\\ 6\end{pmatrix}$ Ergebnis: $A\odot\vec{v}=\begin{pmatrix}1\cdot 5+2\cdot 6\\ 3\cdot 5+4\cdot 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\ 39\end{pmatrix}$	[[1,2][3,4]] 2nd ENTRY *[[5][6]]	

```
[[1,2][3,4]]
           [[1 2]
            [3 4]]
[[1,2][3,4]]*[[5
][6]]
            [[17]
             [39]]
```

Beispiel:

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix};\ \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Ergebnis:

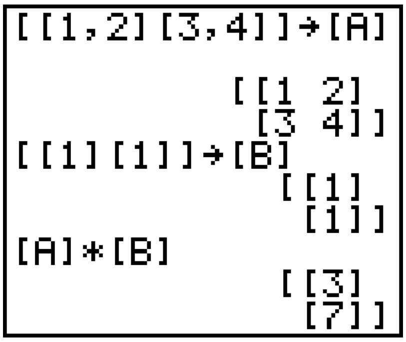
$$A\odot\vec{b}=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot1\\3\cdot1+4\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$$

zweimal [2nd] **ENTRY**
[STO▸] [MATRX] **NAMES**
1:[A] [ENTER]

[[1][1]][STO▸]
[MATRX] **NAMES**
2:[B] [ENTER]

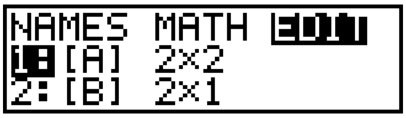
[MATRX] **NAMES**
1:[A] [ENTER]
*****[MATRX] **NAMES**
2:[B] [ENTER]

<u>Hinweis</u>: die Variablennamen **[A]**, **[B]** usw. sind nur über das Menü [MATRX] erreichbar, nicht über die einzelnen Tasten **[**, **A**, **]**.



```
[[1,2][3,4]]→[A]
                [[1 2]
                 [3 4]]
[[1][1]]→[B]
                   [[1]
                    [1]]
[A]*[B]
                   [[3]
                    [7]]
```

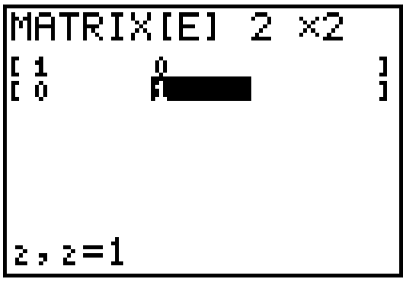
Die Matrizen (und Vektoren) können auch im Matrixeditor [MATRX] **EDIT** eingegeben und verändert werden.



```
NAMES MATH EDIT
1:[A] 2×2
2:[B] 2×1
```

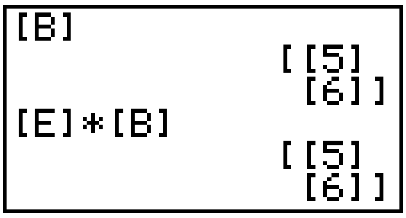
Die Matrix $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, bei der auf der Diagonalen Einsen und sonst nur Nullen stehen, heißt „Einheitsmatrix”. Die Multiplikation einer (in Zeilenzahl passenden) Einheitsmatrix mit einer bliebigen Matrix (oder Vektor) lässt dies unverändert.

[[1,0][0,1]]
[STO▸] [MATRX] **NAMES**
5:[E] [ENTER]



```
MATRIX[E] 2 ×2
[ 1       0          ]
[ 0       1          ]



2,2=1
```

[MATRX] **NAMES 5:[E]***[MATRX] **NAMES**
2:[B]

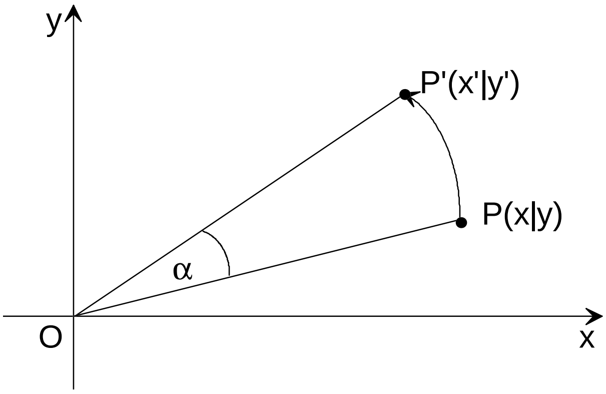


```
[B]
                   [[5]
                    [6]]
[E]*[B]
                   [[5]
                    [6]]
```

4.4.2 Drehung um den Ursprung

Ein Punkt $P(x|y)$ wird um den Ursprung $O(0|0)$ um den Winkel α gedreht; es ergibt sich der Bildpunkt $P'(x'|y')$:

$$P(x \mid y) \overset{O(0\mid 0);\, \alpha}{\mapsto} P'(x' \mid y').$$



Die Abbildungsgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \\ y' &= x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

lassen sich auch in Matrixform schreiben:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ bzw. } \overrightarrow{OP'} = A \odot \overrightarrow{OP},$$

wobei $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OP'}$ die Ortsvektoren der Punkte P und P' sind, und A die Abbildungsmatrix ist.

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: $P(3 \mid 1) \overset{O(0\mid 0);\, \alpha=30°}{\mapsto} P'(x' \mid y')$ Abbildungsmatrix A: $A = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix}$	Abbildungsmatrix *A* im Matrixeditor editieren	 MATRIX[A] 2 ×2 [.86603 -.5] [.5 0] 2,2=cos(30)
A auf **[A]**, $\vec{p}$ auf **[B]** speichern	Der Wert von sin 30° wird im Augenblick der Eingabe (ENTER) numerisch ausgewertet und durch 8,866025... ersetzt.	 MATRIX[A] 2 ×2 [.86603 -.5] [.5 .86603] 2,2=.8660254037...
$A \odot \vec{p}$ ergibt $\vec{p}' = \begin{pmatrix} 2{,}098076211.. \\ 2{,}366025404.. \end{pmatrix}$	**[A]*[B]**	 [A]*[B] [[2.098076211] [2.366025404]]

Beispiel:
$\Delta ABC \overset{O(0\,|\,0);\ \alpha}{\mapsto} \Delta A'B'C'$ mit
$A(1|0)$, $B(4|0)$, $C(1|3)$ und $\alpha = 90°$.

Abbildungsmatrix `[A]` editieren

```
MATRIX[A] 2 ×2
[ 0         -1        ]
[ 1          0        ]



2,2=cos(90)
```

Die Ortsvektoren der drei Eckpunkte A, B und C können als Spalten einer dreispaltigen Matrix B geschrieben werden:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

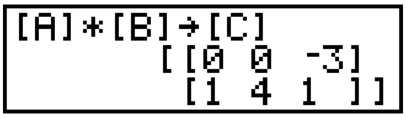
Matrix `[B]` der drei Ortsvektoren editieren

```
MATRIX[B] 2 ×3
[ 1        4        1      ]
[ 0        0        3      ]
```

Ergebnismatrix $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Bildpunkte: $A'(0|1)$, $B'(0|4)$, $C'(-3|1)$

`[A]*[B]STO▸[C]`

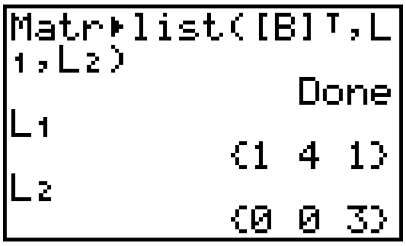


```
[A]*[B]→[C]
         [[0  0  -3]
          [1  4   1 ]]
```

Beide Dreiecke können im Koordinatensystem gezeichnet werden. Dazu werden die Matrizen B und C mit den Koordinaten der Ur- und Bildpunkte in Listen `L1` und `L2` bzw. `L3` und `L4` umgeformt.

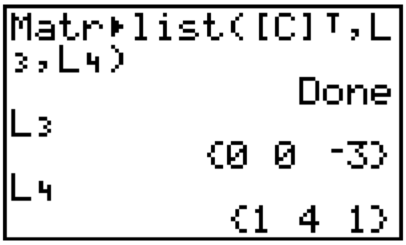
`MATRX` `MATH`
`8:Matr▸list([B]ᵀ,L1,L2)`

`Matr▸list([C]ᵀ,L3,L4)`



```
Matr▸list([B]ᵀ,L
1,L2)
                Done
L1
           {1  4  1}
L2
           {0  0  3}
```

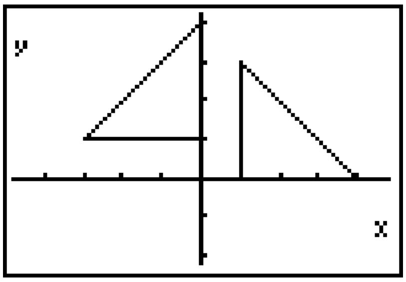
analog



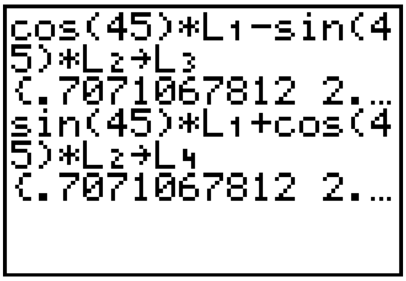
```
Matr▸list([C]ᵀ,L
3,L4)
                Done
L3
          {0  0  -3}
L4
           {1  4  1}
```

Graphen für die Listen `L1` und `L2` bzw. `L3` und `L4` vereinbaren und zeichnen.

`GRAPH`

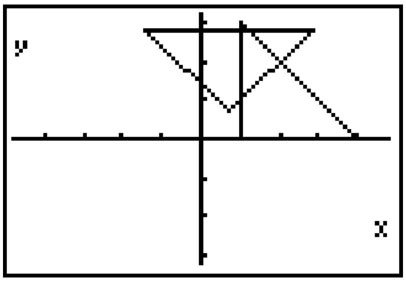


Natürlich kann man die Abbildungsgleichungen auch einzeln für die x- und y-Koordinaten schreiben und die entsprechenden Operationen auf die Listen `L1` und `L2` anwenden.



```
cos(45)*L1-sin(4
5)*L2→L3
{.7071067812 2.…
sin(45)*L1+cos(4
5)*L2→L4
{.7071067812 2.…
```

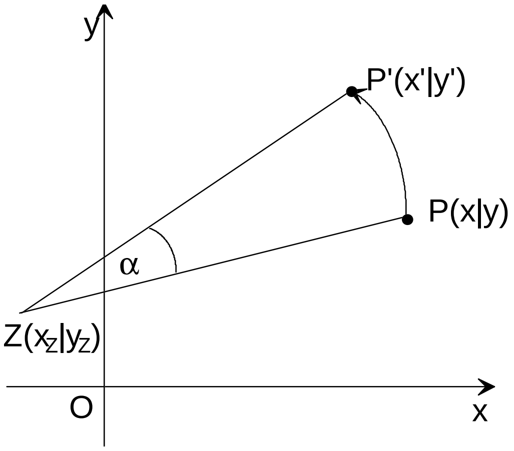
`GRAPH`



4.4.3 Drehung um beliebigen Punkt

Ein Punkt $P(x|y)$ wird um das Zentrum $Z(x_Z \mid y_Z)$ um den Winkel α gedreht; es ergibt sich der Bildpunkt $P'(x'|y')$:

$$P(x \mid y) \overset{Z(x_Z \mid y_Z);\,\alpha}{\mapsto} P'(x' \mid y').$$



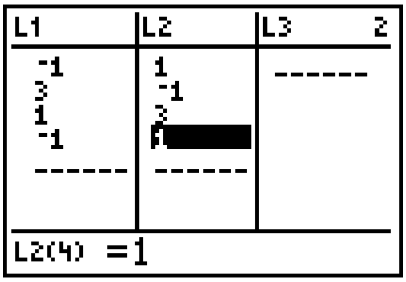
Diese Abbildung kann aus drei bekannten Abbildungen zusammengesetzt werden, die nacheinander ausgeführt werden:

- *P* um den entgegengesetzten Ortsvektor von *Z* auf *P** verschieben (*Z* wandert dadurch in den Ursprung *O*)
- *P** um den Ursprung *O* auf *P*** drehen
- *P*** um den Ortsvektor von *Z* auf *P’* „zurück” verschieben

Es ergibt sich die Abbildungskette

$$\overrightarrow{OP'} = A \odot (\overrightarrow{OP} \oplus -\overrightarrow{OZ}) \oplus \overrightarrow{OZ}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \odot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -x_Z \\ -y_Z \end{pmatrix} \right) \oplus \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \end{pmatrix}$$

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: ΔABC mit $A(-1\|1)$, $B(3\|-1)$, $C(1\|3)$, $Z(-1\|-1)$, α = 45° ΔABC auf Listen `L1` und `L2` speichern	z. B. `STAT` `EDIT`	

```
L1      L2      L3     2
-1      1       ------
3       -1
1       3
-1      1
------  ------
L2(4) =1
```

`ʟ1` und `ʟ2` auf Matrix `[C]` speichern

`PRGM` `EXEC 1:LM`

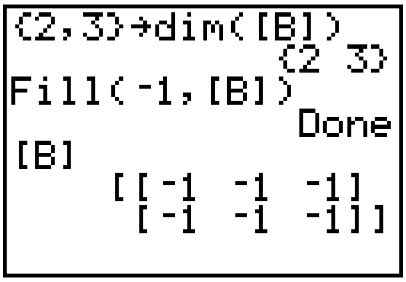
```
prgmLM
                  Done
```

Drehmatrix `[A]` editieren

```
MATRIX[A] 2 ×2
[ .70711  -.7071   ]
[ .70711  .70711   ]

2,2=cos(45)
```

Verschiebungsvektor $\overrightarrow{OZ}$ in drei Spalten von Matrix `[B]` speichern

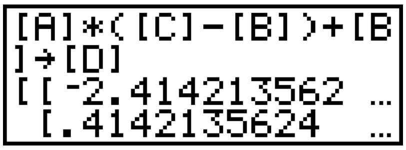
Da *x*- und *y*-Koordinate hier gleiche Werte haben, kommt auf alle Elemente der Matrix `[B]` der Wert -1



```
{2,3}→dim([B])
              {2 3}
Fill(-1,[B])
               Done
[B]
     [[-1  -1  -1]
      [-1  -1  -1]]
```

Abbildungskette durchführen

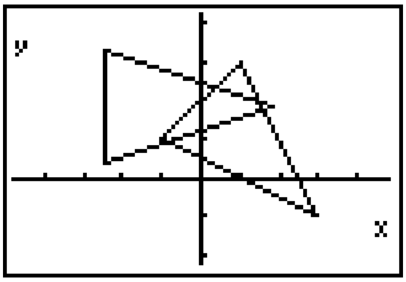
`[A]*([C]-[B])+[B]` `STO▶` `[D]`



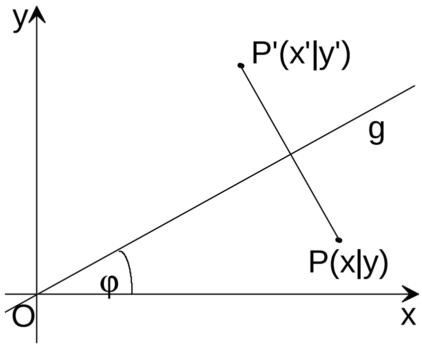
```
[A]*([C]-[B])+[B
]→[D]
[[-2.414213562 …
 [.4142135624  …
```

Ergebnismatrix `[D]` auf `ʟ3` und `ʟ4` speichern und Graphen zeichnen

`PRGM` `EXEC 2:ML`
. . .
`GRAPH`



4.5 Achsenspiegelung an einer Ursprungsgeraden

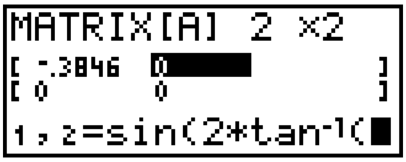
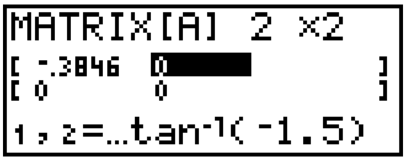
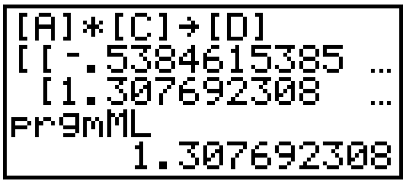


$$P(x \mid y) \overset{g}{\mapsto} P'(x' \mid y');\ g: y = m \cdot x$$

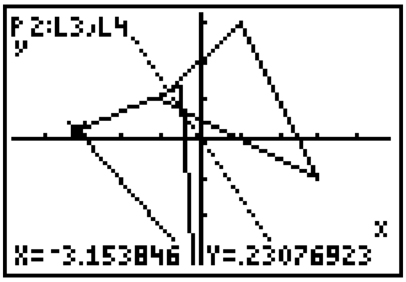
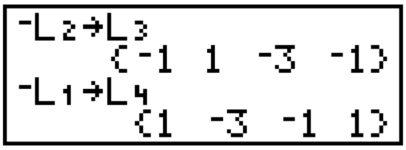
bedeutet eine Achsenspiegelung des Punktes $P(x|y)$ an einer Ursprungsgeraden g mit dem Steigungswinkel φ. Die Abbildungsgleichung in Matrixform lautet

$\overrightarrow{OP'} = A \odot \overrightarrow{OP}$, wobei die Abbildungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \text{ mit } \tan\varphi = m$$

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: Δ*ABC* mit *A*(-1|1), *B*(3|-1), *C*(1|3), *g*: *y* = -1,5 *x*	Beim Editieren der Abbildungsmatrix `[A]` wird für den Winkel φ der Term `tan⁻¹(-1.5)` eingesetzt.	 MATRIX[A] 2 ×2 [-.3846 0] [0 0] 1,2=sin(2*tan⁻¹(
	Der TI-83 ersetzt diesen Term sofort durch einen nummerischen Wert.	 MATRIX[A] 2 ×2 [-.3846 0] [0 0] 1,2=…tan⁻¹(-1.5)  MATRIX[A] 2 ×2 [-.3846 -.9231] [-.9231 [illegible]] 2,2=.3846153846…
Abbildung durchführen, Ergebnis auf Matrix [D] speichern und in Listen umwandeln.		 [A]*[C]→[D] [[-.5384615385 … [1.307692308 … prgmML 1.307692308

Funktionsgleichung der Spiegelachse *g* eingeben	`[Y=]`
	`Y1=-1.5X`
	Markierung des Graphen „gepunktet”
		
		Plot1 Plot2 Plot3
		\Y1=-1.5X

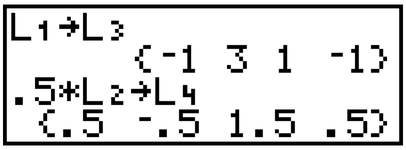
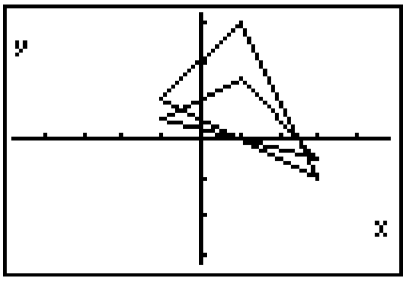
Koordinaten der Bildpunkt können mit `[TRACE]` „abgefahren” werden.	`[GRAPH]` evtl. `[TRACE]`	 P2:L3,L4 X=-3.153846 Y=.23076923
Bei Achsenspiegelung an den Koordinatenachsen oder an den Winkelhalbierenden vereinfacht sich die Abbildungsmatrix. Beispiel: *g*: *y* = -*x* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$ die Abbildungsgleichungen: $x' = -y$ $y' = -x$	Dadurch kann am TI-83 die Matrizenmultiplikation entfallen und durch einfache Umspeicherung der Listen ersetzt werden. `[(-)] L2 [STO▸] L3` und `[(-)] L1 [STO▸] L4`	 -L2→L3 {-1 1 -3 -1} -L1→L4 {1 -3 -1 1}

4.6 Orthogonale Affinität, Scherung

Bei beiden Abbildungen ändert sich jeweils nur 1 Koordinate, daher sind entsprechenden Gleichungen einfacher, ebenso die Manipulationen am TI-83.

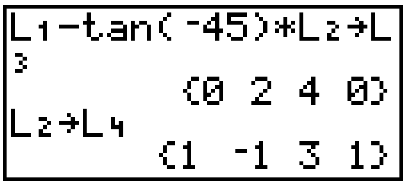
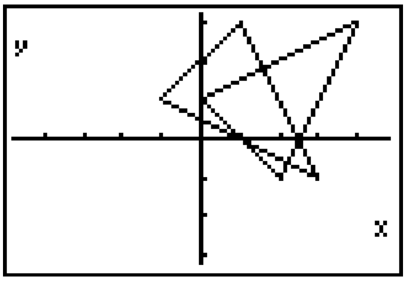
4.6.1 Orthogonale Affinität zur *x*-Achse

$$x' = x$$
$$y' = k \cdot y$$

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: ΔABC mit $A(-1\|1)$, $B(3\|-1)$, $C(1\|3)$; $k = 0{,}5$	Liste L2 mit den *y*-Koordinaten mit *k* = 0,5 multiplizieren, L1 unverändert lassen	 L₁→L₃ {⁻1 3 1 ⁻1} .5*L₂→L₄ {.5 ⁻.5 1.5 .5}
Springt man mit TRACE von Dreieck zu Dreieck, so zeigt sich, dass die *x*-Koordinaten entsprechender Punkte unverändert bleiben.	GRAPH TRACE	

4.6.2 Scherung an der *x*-Achse

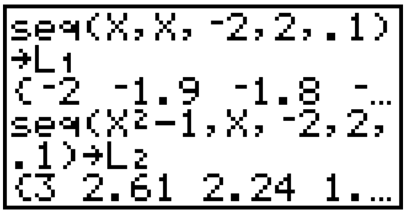
$$x' = x - \tan\varphi \cdot y$$
$$y' = y$$

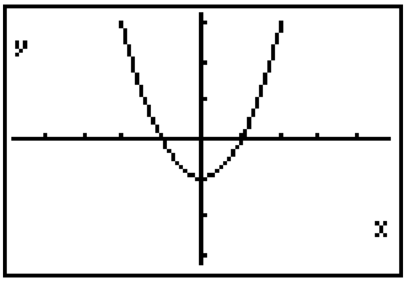
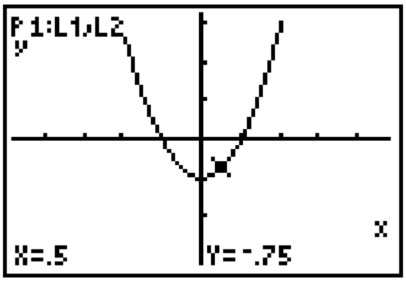
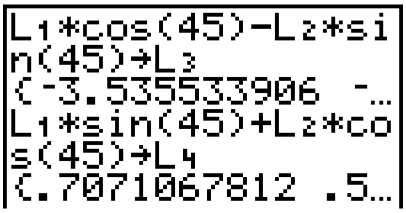
Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: ΔABC mit $A(-1\|1)$, $B(3\|-1)$, $C(1\|3)$; φ = -45°	L1-tan(-45)*L2 STO▶ L3 L2 STO▶ L4	 L₁-tan(⁻45)*L₂→L₃ {0 2 4 0} L₂→L₄ {1 ⁻1 3 1}
Springt man mit TRACE von Dreieck zu Dreieck, so zeigt sich, dass die *y*-Koordinaten entsprechender Punkte unverändert bleiben.	GRAPH TRACE	

4.6.3 Abbildung von Funktionen

Da der TI-83 kann nur numerisch Rechnungen durchführen und keine symbolischen Manipulationen. Daher können auch nur Koordinaten von Punkten abgebildet werden und keine (symbolischen) Funktionsterme mit Variablen. So ist es nicht möglich, von einer Urfunktion die Bildfunktion ermitteln zu lassen und dann evtl. von beiden den Graphen zu zeichnen. Allerdings kann man von der Urfunktion eine größere Anzahl von Punkten berechnen (und zeichnen) lassen und diese dann rechnerisch abbilden. Der Graph dieser Bildpunkte entspricht dann weitgehend dam Graphen der eigentlich gesuchten Bildfunktion.

Arbeitsschritte	Tastenfolge	Display
Beispiel: $f(x) : y = x^2 - 1 \overset{O(0\|0);\ 45°}{\mapsto} f'(x)$ im Intervall $x \in [-2; 2]$		

Die *x*-Koordinaten werden mit `seq(` in äquidistanter Folge von -2 bis 2 mit Schrittweite 0,1 auf der Liste `L1` gespeichert,
die Folge der zugehörigen *y*-Koordinaten mit der entsprechenden Anweisung nach dem Bildungsgesetz: $x^2 - 1$.
	`seq(` über `2nd` `CATALOG`, dort blättern bis „s”, `ENTER` `seq(X,X,-2,2,.1)` `STO▸` `L1`
	`seq(X²-1,X,-2,2,.1)` `STO▸` `L2`
	ergibt zwei Listen mit je 41 Elementen
		
		seq(X,X,⁻2,2,.1)
		→L₁
		{⁻2 ⁻1.9 ⁻1.8 ⁻...
		seq(X²−1,X,⁻2,2,
		.1)→L₂
		{3 2.61 2.24 1....

Diese Punktmenge wird über `2nd` `STAT PLOT` graphisch dargestellt und entspricht dem Graphen, der sich aus `Y=` `y1=X² -1` ergäbe.	`2nd` `STAT PLOT` ... und `GRAPH`	
Man kann auch auf diesem Graphen (der Listen `L1` und `L2`) mit `TRACE` entlangfahren.	`TRACE`	
Die Abbildungsgleichungen werden auf die Koordinatenlisten `L1` und `L2` angewandt.		 L₁*cos(45)−L₂*si n(45)→L₃ {⁻3.535533906 ⁻... L₁*sin(45)+L₂*co s(45)→L₄ {.7071067812 .5...
Die Zeichnung zeigt den um 45° gedrehten Graphen einer Parabel. Dieser Bildgraph ist keine Funktion, nur eine Relation.	`GRAPH`